

# Análisis e implementación de una ley de control de trayectoria para un manipulador robótico industrial. Un enfoque basado en el control de movimiento

Alejandro Hossian<sup>1</sup>, Roberto Carabajal<sup>2</sup>, Hernán Merlino<sup>3</sup>, Maximiliano Alveal<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Grupo de investigación de Robótica Aplicada, Facultad Regional del Neuquén, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Email: alejandrohossian@yahoo.com.ar

<sup>2</sup>Grupo de investigación de Robótica Aplicada, Facultad Regional del Neuquén, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Email: rcarabaj@gmail.com

<sup>3</sup>Grupo de investigación de Robótica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina. Email: hmerlino@gmail.com

<sup>4</sup>Grupo de investigación de Robótica Aplicada, Facultad Regional del Neuquén, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Email: maximilianoalveal@hotmail.com

## Resumen

El problema del control de movimiento constituye uno de los tópicos más importantes dentro del campo de la robótica de manipuladores. Dicho control se focaliza en hacer pasar el extremo del manipulador siguiendo la trayectoria deseada en posición y velocidad tan cerca como sea posible. El objetivo central del presente trabajo de investigación consiste en el diseño de un controlador de movimiento por par calculado, a partir de un análisis detallado de las condiciones de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado, la cual se obtiene en términos de las correspondientes variables de estado. Se plantea un caso de estudio de un manipulador de dos grados de libertad, y se analizan los resultados obtenidos correspondientes a los errores de posición, velocidad, par de control y plano fase; haciendo uso del material de software apropiado. Se extraen conclusiones y se proponen futuras líneas de investigación.

**Palabras clave:** estabilidad asintótica, modelo dinámico, par calculado, lazo cerrado, variables de estado.

## Abstract

The problem of motion control constitutes one of the most important topics within the field of manipulator robotics. Said control focuses on passing the end of the manipulator following the desired trajectory in position and speed as closely as possible. The central objective of this research work consists of the design of a calculated torque motion controller, based on a detailed analysis of the conditions of global asymptotic stability of the equilibrium point of the closed-loop equation, which is obtained in terms of the corresponding state variables. A case study of a manipulator with two degrees of freedom is proposed, and the results obtained corresponding to the position, speed, control torque and phase plane errors are analyzed; making use of the appropriate software material. Conclusions are drawn and future lines of research are proposed.

**keywords:** asymptotic stability, dynamic model, calculated torque, closed loop, state variables.

## 1. Introducción

El control de movimiento o “control de trayectoria” consiste en la obtención de la función vectorial  $\tau$  que se debe suministrar a los servos actuadores que conforman las articulaciones del robot; de forma tal que las posiciones y velocidades vinculadas a las coordenadas articulares del robot  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$ , sigan con la mayor exactitud posible a las posiciones y

velocidades articulares deseadas  $q_d(t)$  y  $\dot{q}_d(t)$ .

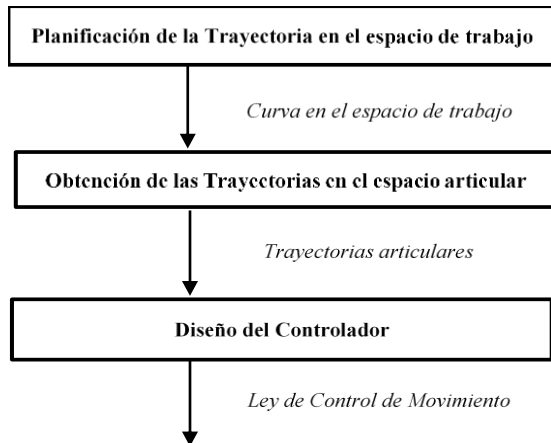
Consecuentemente, el extremo terminal del robot debe seguir la trayectoria deseada en su espacio de trabajo, conforme a los requisitos del usuario. Un caso especial de control de movimiento es el de “control de posición”; en el cual no existe una referencia variable en el tiempo que el robot deba seguir, como sí sucede en el control de trayectoria [1]. Más formalmente, el objetivo del control de movimiento consiste en hallar el vector  $\tau$  tal que se cumpla la ecuación (1).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

Donde  $\tilde{q}(t)$  y  $\dot{\tilde{q}}(t) \in \mathbb{R}^n$  representan el error de posición (diferencia entre la posición articular deseada  $q_d(t)$ ) y la posición articular actual del robot  $q(t)$ , y de manera análoga, el error de velocidad (diferencia entre la velocidad articular deseada  $\dot{q}_d(t)$ ) y la velocidad articular actual del robot  $\dot{q}(t)$ ). Ver ecuación (2).

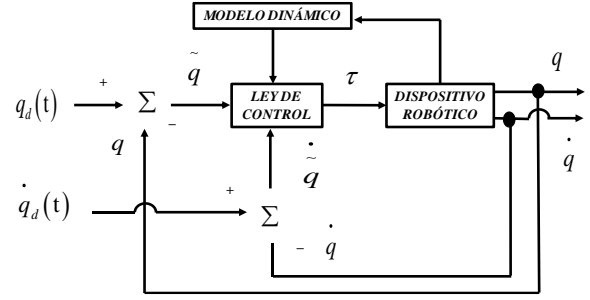
$$\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t) \quad \dot{\tilde{q}}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \quad (2)$$

Dentro de un marco general, el tópico del control de movimiento de robots manipuladores se puede analizar en base a tres fases: 1) Planificación de la trayectoria en el espacio de trabajo, 2) Obtención de las trayectorias en el espacio articular y 3) Diseño del controlador. De la 1<sup>ra</sup> fase se obtiene la curva en el espacio de trabajo del robot, que vincula la posición inicial del efector final del manipulador con la posición final deseada del manipulador. La 2<sup>da</sup> fase consiste en parametrizar en la línea de tiempo la curva obtenida en la fase 1, obteniendo así la evolución temporal de las trayectorias articulares deseadas mediante cinemática inversa. La tercera fase aborda la resolución del problema de control de movimiento citado. Esta 3<sup>ra</sup> fase es la central en la cual se focaliza el presente trabajo de investigación, entendiéndose que ya se estableció la trayectoria en el espacio de trabajo y se obtuvieron las correspondientes trayectorias en el espacio articular. La figura 1 ilustra las 3 fases.



**Figura 1.** Fases correspondientes al control de movimiento

En la figura 2 se ilustra el diagrama de bloques general para el control de trayectoria en robots manipuladores.



**Figura 2.** Lazo cerrado para control de trayectoria en robots

Se observa que las variables de estado  $\tilde{q}(t)$  y  $\dot{\tilde{q}}(t) \in \mathbb{R}^n$  que determinan el problema de control de trayectoria se procesan por medio de la estructura matemática del esquema de control; la cual precisa del conocimiento completo de la dinámica del manipulador, a diferencia del caso de regulación, o control de posición, en el cual es necesario conocer la dinámica parcial del robot [2]. El controlador de trayectoria o par de control  $\tau$ , incluye una función vectorial no lineal de  $q(t), \dot{q}(t)$  y  $\ddot{q}(t)$ . Se asume que los manipuladores disponen de sensores de posición y velocidad para cada articulación; por lo que  $q(t), \dot{q}(t)$  se pueden medir, y son susceptibles de ser empleados en los algoritmos de control de trayectoria. La forma general de la función vectorial del par de control  $\tau$  la da la ecuación (3), y es la ley de control.

$$\tau = \tau \left( K_p, K_v, \tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}(t), M(q), C(q, \dot{q}), g(q) \right) \quad (3)$$

La ecuación en lazo cerrado que expresa el problema del control de movimiento se establece en términos de las variables de estado  $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T$ ; se ve en ecuación (4).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = f \left[ K_p, K_v, \tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}(t), M(q), C(q, \dot{q}), g(q) \right] \quad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial ordinaria de naturaleza no lineal y no autónoma, y que representa un sistema dinámico no lineal y no autónomo del tipo  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ . La característica de no autonomía se debe a la inclusión del vector de trayectorias articulares deseadas  $\mathbf{q}_d(t)$ . Es importante destacar, que la trayectoria de seguimiento  $\mathbf{q}_d(t)$  debe ser una función doblemente diferenciable (clase  $C^2$ ). Por lo tanto,  $\dot{q}_d(t)$  y  $\ddot{q}_d(t)$  deben ser funciones continuas y diferenciables suaves y acotadas en sus normas, en función de las características propias del robot [3].

## 1.1. Marco Teórico

En el contexto del presente trabajo de investigación se emplean tópicos fundamentales para el análisis del control de trayectoria de un robot manipulador, en especial, para el tratamiento del algoritmo de control por par calculado. En este sentido, se desarrollan brevemente los siguientes temas: modelo dinámico de un manipulador robótico por medio de la formulación Lagrangiana, sistemas dinámicos, estabilidad en el sentido de Lyapunov [4], Teorema de Lasalle y las características centrales del control por par calculado.

### 1.1.1. Modelo dinámico para robots manipuladores

Los modelos dinámicos de los robots manipuladores están conformados ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y no autónomas. De esta forma, las técnicas de diseño y los procedimientos de sintonía que se emplean en sistemas lineales, se pueden aplicar limitadamente en la síntesis de controladores con alto desempeño para estos dispositivos [5]. El diseño de algoritmos de control de movimiento para manipuladores de “n” grados de libertad (gdl) requiere conocer su modelo dinámico; en especial, cuando la técnica de diseño del controlador se sustenta en la estructura de dicho modelo.

Este modelo exhibe de manera explícita los principales fenómenos físicos presentes en la estructura mecánica del sistema – robot; tales como, fuerzas centrífugas y de Coriolis, efectos inerciales, par gravitacional y fenómenos de fricción (viscosa, Coulomb y estática). La descripción matemática del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, está dada por la ecuación diferencial no lineal, ecuación (5):

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_f(\dot{q}, f_e) \quad (5)$$

Donde  $\tau(t)$  es el vector de fuerzas o pares que se aplica a cada articulación,  $q(t) \in R^n$  es el vector de posiciones articulares,  $\dot{q}(t) \in R^n$  es el vector de velocidades articulares,  $\ddot{q}(t) \in R^n$  es el vector de aceleraciones articulares,  $M(q) \in R^{n \times n}$  es la matriz de inercia que representa el cambio de estado de movimiento del robot,  $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrípetas (fuerzas radiales en movimientos curvilíneos hacia adentro del centro de curvatura) y de Coriolis (esta fuerza representa la desviación del movimiento de traslación a raíz de su componente de rotación),  $G(q) \in R^n$  es el vector de pares gravitacionales (vector gradiente de la energía potencial) y

$F_f(\dot{q}, f_e) \in R^n$  es el vector de pares de fricción (viscosa, Coulomb y estática) de cada articulación del robot. La expresión (5) es una ecuación diferencial compleja, multivariable con dinámica fuertemente acoplada y “no lineal” en el vector de estados  $[q^T, \dot{q}^T]^T$ ; además de ser válida cuando el robot

tiene una estructura en cadena cinemática abierta y que no incluye el fenómeno de elasticidad [6].

**Formulación Lagrangiana:** las ecuaciones de movimiento de Lagrange son una potente herramienta analítica para el modelado de robots manipuladores [7]; dado que permiten describir la dinámica del robot a partir de un balance de energía cinética y potencial de sus eslabones. La formulación Lagrangiana se realiza mediante las expresiones de la cinemática directa del manipulador, la cual permite llevar a cabo cuatro procedimientos de cálculo: 1) cálculo de la energía cinética  $(K(q(t), \dot{q}(t)))$ , 2) cálculo de la energía potencial  $(U(q(t)))$ , 3) cálculo del Lagrangiano  $(L = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)))$  y 4) formulación de las ecuaciones escalares dinámicas de movimiento de Lagrange para un robot manipulador de n (gdl); las cuales se desarrollan para cada uno de ellos (3), y donde el miembro  $\tau - F_f(\dot{q}, f_e)$  se refiere a fuerzas o pares no conservativos en cada articulación, ecuación (6).

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau - F_f(\dot{q}, f_e) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

### 1.1.2. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales que describen los fenómenos físicos presentes en el manipulador. En robótica es habitual transformar el modelo dinámico a una ecuación diferencial de primer orden (ode), haciendo uso de la representación en variables de estado. La estructura de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es como la (7), pudiendo ser la representación de un sistema mecánico con dinámica lineal y no lineal [8].

$$\dot{x} = f(x) \quad (7)$$

Donde  $x \in R^n$  es la variable de estado fase que suministra información interna acerca de la dinámica del sistema mecánico, siendo función continua del tiempo  $x = x(t)$  y  $n \in N$ . La derivada temporal de la variable de estado existe y es continua en el tiempo:  $\dot{x} \in R^n$  y  $\dot{x} = \dot{x}(t)$ . La función  $f(x)$  es un mapeo vectorial  $f: R^n \rightarrow R^n$  en la variable de estado  $x(t)$ . La estructura (7) se corresponde con un sistema dinámico autónomo, dado que el tiempo  $t$  como variable independiente está presente de forma implícita, es decir  $x = x(t)$ . Una gran mayoría de los sistemas mecánicos son de esta forma, teniendo en cuenta que los parámetros del modelo dinámico permanecen invariantes en la línea de tiempo.

### 1.1.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Por medio de esta teoría se analiza el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales conforme a la ecuación (7); siendo preciso fijar ciertos conceptos:

Punto de equilibrio: es un vector constante  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  del sistema (7) si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$ . Como consecuencia de esta definición, si la condición inicial  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio ( $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ ), entonces se satisface que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e \forall t \geq 0 \text{ y } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \forall t \geq 0.$$

En general se asume que el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio de un sistema dinámico representado por la ecuación (7). El vector  $\mathbf{x}_e$  constituye un ente dinámico en el cual todas las fuerzas del sistema hallan su equilibrio; siendo fundamental en control de robots analizar la estabilidad del vector  $\mathbf{x}_e$ .

Estabilidad del punto de equilibrio y zona de atracción: en la zona de atracción cada solución de la trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  que empieza suficientemente cercana a  $\mathbf{0}$ , a partir de  $t_0$  se aproxima al origen  $\mathbf{0}$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ . El origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio *asintóticamente estable en forma global* si: 1) el origen es estable; esta condición se cumple si  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  un número  $\delta / \|\mathbf{x}(0)\| < \delta \rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$  y 2) el origen es atractivo en forma global; condición que se cumple si  $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ . La estabilidad asintótica global en sistemas dinámicos autónomos indica que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es único y no depende de la condición inicial  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ . La estabilidad asintótica local significa varios puntos de equilibrio y la convergencia de la trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  es con respecto a uno de esos puntos (en general el origen de estados  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ) y, por lo tanto, sí depende de las condiciones iniciales dentro de la zona de atracción del origen de estados. En síntesis, la existencia de un único  $\mathbf{x}_e$  es una condición necesaria para establecer sobre éste estabilidad asintótica en forma global [9]. Estas nociones de estabilidad son propiedades intrínsecas deseables del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  de un sistema dinámico caracterizado por la ecuación (7).

Método directo de Lyapunov: la característica principal de la teoría de estabilidad de Lyapunov expresa que el punto de equilibrio de un sistema dinámico autónomo como el caracterizado por la ecuación (7), es estable si su energía total es una función definida positiva continuamente decreciente hasta alcanzar un estado de equilibrio, el cual está asociado con el mínimo global de la energía total. De esta forma, la derivada temporal de esta función de energía (potencia del sistema) es definida negativa hasta alcanzar el llamado equilibrio. En síntesis, una función  $V(\mathbf{x})$  para el equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es una función candidata de Lyapunov de la ecuación (7) si  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  si:  $V(\mathbf{x})$  es un función definida positiva, radialmente no acotada y  $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  y  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$  son

funciones continuas respecto a  $\mathbf{x}$ . De acuerdo a estos conceptos, se tienen dos teoremas fundamentales para el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. El primero establece que el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio estable de la ecuación (7) si existe una función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  con derivadas parciales continuas respecto a  $\mathbf{x}$  y tal que su derivada

temporal satisfaga  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall t \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si esto

se cumple, entonces  $V(\mathbf{x})$  es un función decreciente y las soluciones  $\mathbf{x}(t)$  de un sistema dado por la ecuación (7) están acotadas para toda condición inicial  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ . El segundo teorema establece que el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio estable en forma global de la ecuación (7) si existe una función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  tal que su derivada temporal satisfaga  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \forall t \geq 0$  y  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Se cumple para la variable de estado  $\mathbf{x}(t)$  que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

#### 1.1.4. Teorema de Lasalle

Para un sistema dado por la ecuación (7) cuyo origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , y aun cuando la función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  presenta una derivada temporal semidefinida negativa, en ciertos casos se puede demostrar estabilidad asintótica global. Un conjunto  $\Omega$  es invariante para un sistema dinámico (7) si cada trayectoria que comienza en  $\Omega$  permanece en  $\Omega \forall t \geq 0$ . En tal sentido, cualquier punto de equilibrio estable es ejemplo de un conjunto invariante, dado que ninguna trayectoria puede permanecer en forma indefinida en un punto distinto al de equilibrio estable. De esta manera, si es posible construir una función Lyapunov ( $V(\mathbf{x})$ ), tal que sus derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema son semidefinidas negativas, y no existe otra trayectoria del sistema que permanezca indefinidamente en puntos donde las derivadas se disipan; entonces el punto de equilibrio presenta estabilidad asintótica en forma global. Definiendo el conjunto  $\Omega$  en base a la expresión (8):

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\} \quad (8)$$

Si  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  es la única condición inicial en  $\Omega$  que cumple que  $\mathbf{x}(t) \in \Omega \forall t \geq 0$ ; el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio asintóticamente estable en forma global [10].

#### 1.2. Características del control por Par calculado

El algoritmo de control por par calculado pertenece a la familia de controladores de movimiento, y presenta las siguientes características, alguna de las cuales se analizan con mayor detalle en la siguiente sección:

- A diferencia de otros controladores de este grupo, la ley de control por par calculado no exhibe de forma explícita el término lineal de un controlador del tipo PD (Proporcional – Derivativo).
- La estructura de control por par calculado hace uso de la dinámica de compensación en el lazo de retroalimentación; logrando de esta forma, linealizar y desacoplar la dinámica no lineal que caracteriza al robot manipulador en términos de las variables de estado (posiciones y velocidades articulares).
- En línea con el punto anterior, esta ley de control permite obtener una ecuación diferencial en lazo

cerrado de 2<sup>DO</sup> orden lineal y autónoma en términos

de las variables de estado  $\begin{bmatrix} \ddot{q}^T & \dot{q}^T & q^T \end{bmatrix}^T$ .

- Las matrices de diseño de ganancia proporcional y derivativa  $[K_P]_{n \times n}$  y  $[K_V]_{n \times n}$  son simétricas, definidas positivas y diagonales; y se diseñan en base a que cada articulación responde a un sistema lineal de 2<sup>DO</sup> orden con amortiguamiento crítico [11].

- El origen  $\begin{bmatrix} \ddot{q}^T & \dot{q}^T & q^T \end{bmatrix}^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$  de esta ecuación

diferencial es asintóticamente estable globalmente, y satisface el objetivo de control de movimiento en forma global, dado por la ecuación (1).

- En línea con el punto anterior, para cualquier error de posición inicial y de velocidad inicial

$\ddot{q}(0) \in \mathbb{R}^n$  y  $\dot{q}(0) \in \mathbb{R}^n$ , se cumple la ecuación (1).

- Esta ley de control se basa en el conocimiento del modelo dinámico del robot; que incluye las matrices  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$ . Los métodos de identificación paramétrica (mínimos cuadrados y regresión lineal) son una importante herramienta en este sentido [12].

## 2. Metodología

En esta sección se presenta una explicación conceptual del proceso metodológico utilizado para el análisis de la ley de control por par calculado. Luego se presentan los desarrollos matemáticos correspondientes.

### 2.1. Proceso metodológico

Considerando las características centrales de este algoritmo, las cuáles fueron detalladas en la subsección anterior, es que se propone una hoja de ruta para la obtención del controlador (o par de control), establecer la correspondiente ecuación en lazo cerrado, llevar a cabo el análisis de estabilidad del origen del espacio de estados y, obtenidos  $\ddot{q}$  y  $\dot{q}$ , proceder a la verificación del objetivo de control establecido por la ecuación (1). En caso afirmativo se estima concluido el proceso y se dan por aceptadas las entradas al mismo (Modelo Dinámico, Función de Lyapunov, Matrices de Diseño  $K_P$  y  $K_V$  y las trayectorias articulares deseadas). En caso de que no se cumpla, se rediseña el algoritmo.

El núcleo central bajo el cual opera este proceso es el de seguimiento de una trayectoria deseada en posición y velocidad articular [13]. Esta idea se plasma en que conocidos  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$  y  $\ddot{q}_d(t) \forall t \geq 0$ , el modelo dinámico del robot y las matrices de ganancia; se propone una función candidata de energía de Lyapunov  $V\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} & \dot{q} \end{bmatrix}\right) > 0$

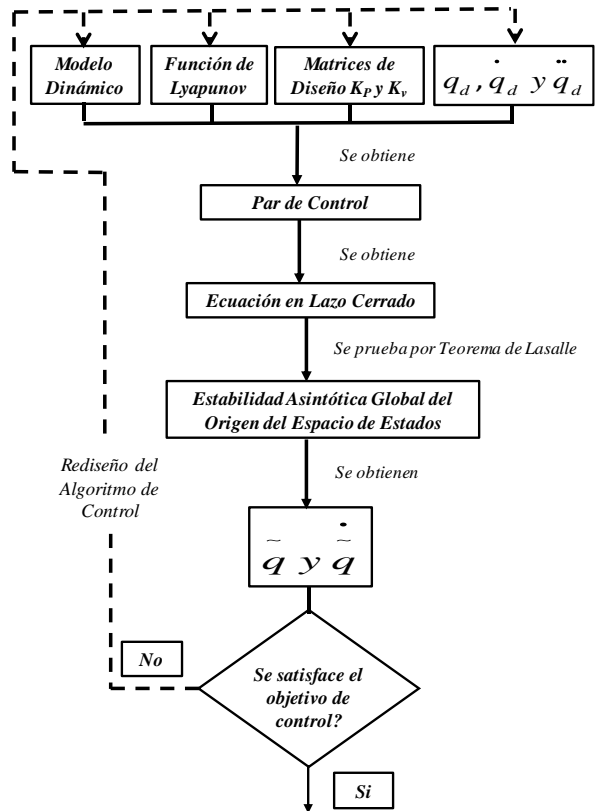
definida positiva globalmente, radialmente desacotada, y tal que su derivada temporal (o potencia entregada al

sistema) sea semidefinida negativa  $\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} & \dot{q} \end{bmatrix}\right) \leq 0$ . Bajo

esta hipótesis, el par de control al que se arriba es el asegura que el origen del espacio de estados es un equilibrio estable y las trayectorias articulares están acotadas. Tal como se verá en el desarrollo posterior, y dado que la ecuación en lazo cerrado a la que se arriba con el soporte del modelo dinámico es de carácter autónoma, es posible aplicar el teorema de Lasalle, con lo que se prueba la estabilidad asintótica global del

origen  $\begin{bmatrix} \ddot{q}^T & \dot{q}^T & q^T \end{bmatrix}^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . De esta forma, el par de control

hallado es el que resuelve el objetivo de control de movimiento dado por la ecuación (1). La figura 3 ilustra los aspectos centrales del proceso metodológico.



**Figura 3.** Proceso metodológico para el análisis de la ley de control por Par Calculado en robots manipuladores

### 2.2. Desarrollo matemático

Los errores de posición, velocidad y aceleración articular, están dados por la expresión (9).

$$\ddot{q}(t) = \ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t), \dot{q}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \text{ y } q(t) = q_d(t) - q(t) \quad (9)$$

La ecuación que modela la dinámica del robot sin el fenómeno de fricción, se observa en la expresión (10).

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (10)$$

Las matrices de diseño  $[K_P] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $[K_V] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son diagonales, simétricas y definidas positivas, por lo que adoptan la forma de expresión (11).

$$\begin{aligned} [K_P]_{n \times n} &= \begin{bmatrix} K_{P1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{P2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{Pn} \end{bmatrix}_{n \times n} \\ [K_V]_{n \times n} &= \begin{bmatrix} K_{V1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{V2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Vi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{Vn} \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned} \quad (11)$$

Se adopta la función candidata de Lyapunov definida positiva y radialmente desacotada en la ecuación (12).

$$V\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (12)$$

Se obtiene la derivada temporal de V (expresión (13)).

$$\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \left[ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \right]$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} &= \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \\ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} &= \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \\ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} & \end{aligned}$$

La derivada temporal de la función de Lyapunov queda según la expresión (13).

$$\begin{aligned} \dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2} \left[ 2 \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + 2 \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \right] \Rightarrow \\ \dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (13)$$

Una forma de pensar el control por par calculado de manera  $\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) \leq 0$ , consiste en resolver cuál es el par de

control  $\tau$  que hace que  $\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right)$  tome la forma de la expresión (14).

$$\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) = - \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_V]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \leq 0 \quad (14)$$

Factorizando  $\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T$  en la expresión (14) y teniendo en

cuenta que  $\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1}$ , se

obtiene la expresión (15):

$$\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \left[ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \right] \quad (15)$$

En esta última expresión se suma y se resta la expresión (14), dejando afuera del corchete el término negativo, con lo que se arriba a la expresión (16):

$$\begin{aligned} \dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \left[ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \right] \pm \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_V]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \Rightarrow \\ \dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T \left[ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + [K_V]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \right] - \\ &\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{1 \times n}^T [K_V]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Dado que se está buscando el par de control  $\tau$  que hace que  $\dot{V}\left(\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix}\right)$  tome la forma de la expresión (14); para

que esto se cumpla,  $\tau$  debe ser tal que anule el corchete de la expresión (16). Se debe cumplir la expresión (17).

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + [K_P]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} + [K_V]_{n \times n} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{n \times 1} = [0]_{n \times 1} \quad (17)$$

Para hallar el par de control  $\tau$ , se obtiene  $\ddot{q}(t)$  de la dinámica del robot de la expresión (10), cuyo desarrollo se ve en la expresión (18).

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= M^{-1}(q) \left[ \tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) \right] \\ \ddot{q}(t) &= \ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t) \Rightarrow \\ \ddot{q}(t) &= \ddot{q}_d(t) - M^{-1}(q) \left[ \tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Conforme al objetivo que se busca, se sustituye la expresión (17) en la (18), obteniendo la expresión (19), donde por simplicidad se omiten los subíndices del orden de las matrices.

$$\ddot{q}_d(t) - M^{-1}(q) \left[ \tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) \right] + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[ \ddot{q}_d(t) + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] + M^{-1}(q) \left[ C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) - \tau \right] = 0 \quad (19)$$

Dado que la matriz  $I = M^{-1}(q)M(q)$ , se sustituye ésta en la expresión (19), y se obtiene la expresión (20) para el par de control  $\tau$ . Se ve que el par de control  $\tau$  a obtener, está incluido en la ecuación (19), la cual es conforme

al requerimiento que debe satisfacer  $\dot{V} \left( \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \right)$ .

$$M^{-1}(q)M(q) \left[ \ddot{q}_d(t) + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] + M^{-1}(q) \left[ C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) - \tau \right] = 0 \Rightarrow$$

$$M^{-1}(q) \left[ M(q) \left[ \ddot{q}_d(t) + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] + \left[ C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) - \tau \right] \right] = 0 \Rightarrow$$

$$M(q) \left[ \ddot{q}_d(t) + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] + \left[ C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) - \tau \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\tau = M(q) \left[ \ddot{q}_d(t) + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) \quad (20)$$

La expresión (20) exhibe la 1<sup>RA</sup> propiedad de la ley de control por par calculado citada en la subsección 1.2; la cual muestra que el par de control  $\tau$  no exhibe de forma explícita el término lineal de un controlador del tipo PD (Proporcional – Derivativo).

Para calcular la ecuación de lazo cerrado de esta ley de control, se iguala el par de control de la expresión (20) con la expresión del par correspondiente a la dinámica del robot dada por la expresión (10). Se obtiene así la expresión (21):

$$M(q) \left[ \ddot{q}_d + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = M(q) \ddot{q} +$$

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) \Rightarrow M(q) \left[ \left( \ddot{q}_d - \ddot{q} \right) + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0 \quad (21)$$

La ecuación obtenida admite la forma de un sistema dinámico lineal de la forma  $\dot{x} = Ax$ , donde  $x$  es el vector

$$\text{de estados dado por } [x]_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad \text{y } A \text{ es una}$$

matriz con coeficientes reales constantes dada por

$$[A]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I]_{n \times n} \\ -[K_p]_{n \times n} & -[K_v]_{n \times n} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}. \quad \text{La ecuación en}$$

lazo cerrado en forma matricial la da la expresión (22):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I]_{n \times n} \\ -[K_p]_{n \times n} & -[K_v]_{n \times n} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad (22)$$

La expresión (22) es una ecuación diferencial lineal y autónoma en términos de las variables de estado

$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T$ , y cuyo único estado de equilibrio es el

origen del espacio de estados  $[0] \in \mathbb{R}^{2n}$ . El par de control  $\tau$  obtenido en la expresión (20), establece que la derivada temporal de la función de Lyapunov dada por la expresión (14) sea semidefinida negativa. Como existe una función de Lyapunov estrictamente positiva y radialmente desacotada respecto a las variables de estado; y se cumple la ecuación (14) para su derivada temporal, se puede aplicar el teorema de Lasalle. Se define el conjunto  $\Omega$  conforme a la expresión (23):

$$\Omega = \left\{ x = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V} \left( \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \right) = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n, \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \ddot{\tilde{q}} \end{bmatrix}_{n \times 1} = [0]_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (23)$$

Se desarrolla el conjunto invariante de las trayectorias más grandes que hacen que  $\dot{V} \left( \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \right) = 0$ , el cual se obtiene observando la dinámica del sistema en el conjunto  $\Omega$  tal que  $\dot{\tilde{q}} = 0$ . En este sentido, se infiere de la expresión (I) que  $\dot{V} \left( \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0$ . De la expresión

anterior se infiere que  $\ddot{\tilde{q}} = 0$ . Sustituyendo estos valores

en la ecuación de lazo cerrado (H)  $\ddot{\tilde{q}} = -K_v \dot{\tilde{q}} - K_p \tilde{q}$ , se infiere que  $\tilde{q} = 0$ . Por consiguiente, el origen del

espacio de estados  $\left( \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T = [0] \in \mathbb{R}^{2n} \right)$  es el único

punto de equilibrio, y por el teorema de Lasalle se prueba estabilidad asintótica global para el mismo. Por lo tanto, se verifica el objetivo de control de movimiento dado por la expresión (1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}} = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q} = 0 \quad (1)$$

La ecuación de lazo cerrado (22) representa un sistema dinámico lineal multivariable desacoplado. En otras palabras, el comportamiento dinámico de los errores de posiciones articulares es llevado a cabo por medio de  $n$  ecuaciones diferenciales de 2<sup>do</sup> orden desacopladas, y donde cada una de ellas es independiente de las otras. De esta manera, las matrices de diseño  $K_P$  y  $K_V$  se eligen de manera tal que cada articulación ofrezca una respuesta similar a un sistema de 2<sup>do</sup> orden críticamente amortiguado, con frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . Asimismo,  $\omega_n$  establece la velocidad de respuesta de la articulación  $y$ , por consiguiente, la tasa

de decaimiento exponencial de los errores  $\ddot{q}$  &  $\dot{q}$ .

La ecuación (22) se corresponde con la de un sistema lineal de 2<sup>do</sup> orden con denominador de la función de la transferencia; identidad en la expresión (24):

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 \equiv s^2 + K_V s + K_P = 0 \quad (24)$$

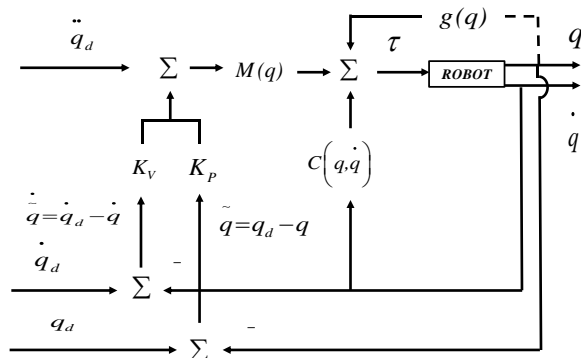
Donde  $\delta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural no amortiguada. Analizando la identidad (24), y asumiendo el amortiguamiento crítico ( $\delta = 1$ ), se obtienen las siguientes relaciones (25):

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= K_P \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K_P}; 2\delta\omega_n = K_V \Rightarrow 2\delta\sqrt{K_P} = K_V \Rightarrow \\ \delta &= \frac{K_V}{2\sqrt{K_P}}. \text{ Para } \delta=1 \Rightarrow 1 = \frac{K_V}{2\sqrt{K_P}} \Rightarrow K_V = 2\sqrt{K_P} \end{aligned} \quad (25)$$

En este contexto y en función de lo expuesto, el formato matricial general de las matrices de diseño  $K_P$  y  $K_V$  se refleja en la expresión (26):

$$\begin{aligned} K_P &= \text{Diag}\{\omega_{1n}^2, \omega_{2n}^2, \dots, \omega_{nn}^2\} \\ K_V &= \text{Diag}\{2\omega_{1n}, 2\omega_{2n}, \dots, 2\omega_{nn}\} \end{aligned} \quad (26)$$

La figura 4 muestra el diagrama de bloques de la ley de control por par calculado.

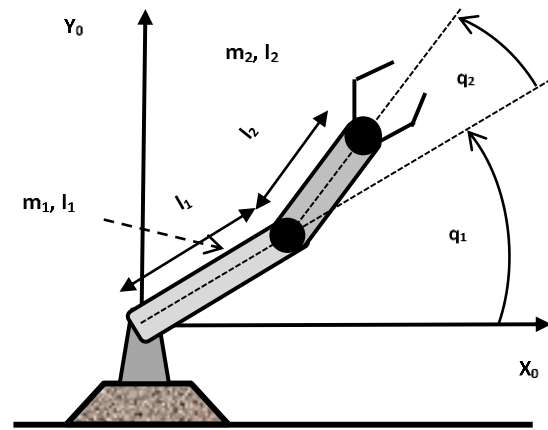


**Figura 4.** Diagrama de bloques para el algoritmo de control por Par Calculado

### 3. Resultados

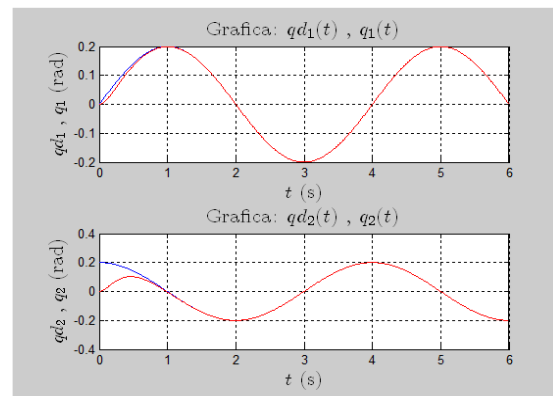
En esta sección se analiza el caso de estudio de un robot manipulador de 2 gdl, que se ve en figura (5). Los datos para la simulación son los siguientes:  $m_1 = 3\text{kg}$ ;  $m_2 = 1,5\text{kg}$ ;  $l_1 = 2\text{m}$ ;  $l_2 = 1\text{m}$ . Las trayectorias deseadas para

cada articulación:  $q_{1d} = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$  &  $q_{2d} = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ ; con  $A = 0,20$  y  $T = 4\text{seg}$ . Se diseña un controlador con amortiguamiento crítico ( $\delta = 1$ ); tiempo de asentamiento ( $\pm 5\%$  del valor final);  $t_s = \pi/6\text{seg}$ . En sistemas de 2<sup>do</sup> orden se da  $t_s = \pi/\delta\omega_n$ . Con  $\delta = 1$ , se tiene  $\omega_n = 6$ . Aplicando la ecuación (25), y asumiendo las mismas ganancias para las 2 articulaciones, es  $K_P = (\omega_n)^2 = 36$  y  $K_V = 2\sqrt{K_P} = 2\sqrt{36} = 12$ . Las matrices de diseño son:  $K_P = \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  &  $K_V = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ .



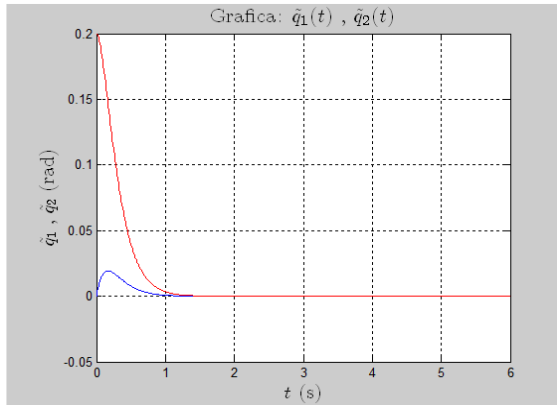
**Figura 5.** Robot planar de 2 grados de libertad

Conforme a las fases del proceso metodológico de figura 3, este inicia con el modelo dinámico, matrices de diseño, función de Lyapunov (ecuación (12)) y las trayectorias deseadas; se exhiben los resultados de una simulación de 6 seg de duración en las figuras 6 a 12. El robot parte de una posición inicial para su extremo de  $X = 3\text{m}$  e  $Y = 0\text{m}$  en coordenadas cartesianas (espacio de trabajo), que se traduce en  $(0; 0,2)$  en coordenadas articulares. En el lapso de los 6 segundos, cada articulación intenta seguir las trayectorias deseadas  $q_{1d}$  y  $q_{2d}$ , como se ve en figura 6. Para las 2 articulaciones la línea azul es la trayectoria deseada y la roja la obtenida. Se observa cómo antes del segundo, el manipulador logra seguir las trayectorias deseadas.



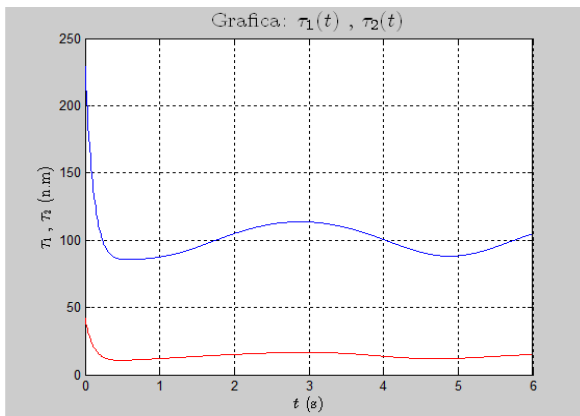
**Figura 6.** Trayectorias deseadas vs trayectorias reales





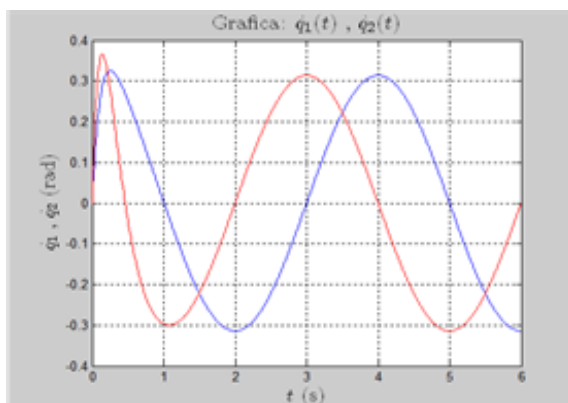
**Figura 7.** Gráfica de los errores en ambas articulaciones

En función del análisis de la figura 6, se da que rápidamente ambos errores tienden asintóticamente a 0. Es decir, que la dinámica del error es la que se espera para una respuesta de amortiguamiento crítico  $\delta = 1$ . La articulación 1 es la línea azul y la 2 es la roja.



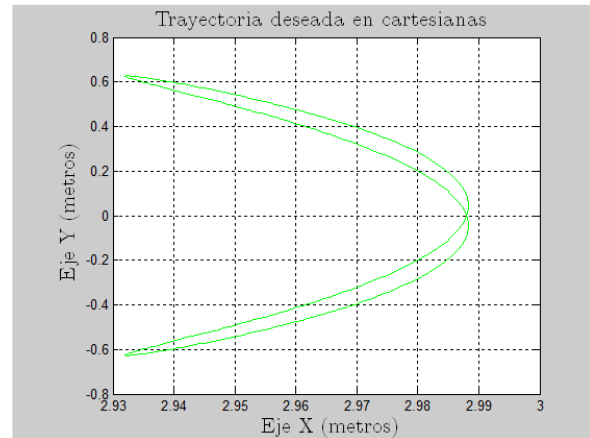
**Figura 8.** Pares de control en ambas articulaciones

En figura 8 se ve la evolución temporal de los pares de control; donde  $\tau_1$  (par en la articulación 1 en azul) es mayor que  $\tau_2$  (par en la articulación 2 en rojo), dado que la articulación 1 tiene que movilizar 2 eslabones, a diferencia de la articulación 2 que mueve 1 eslabón.

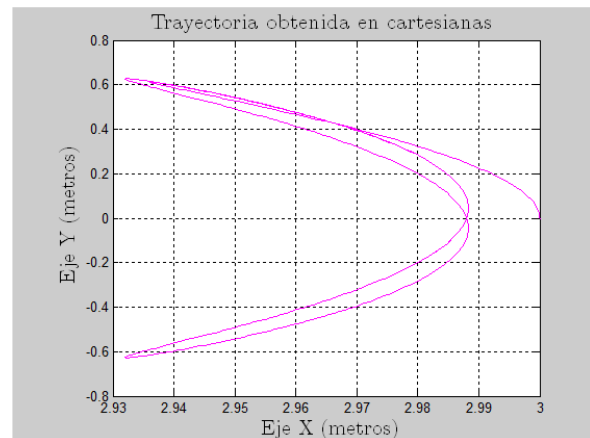


**Figura 9.** Gráfica de las velocidades articulares obtenidas

En figura 9 se exhiben las gráficas de las velocidades articulares obtenidas en el lapso de los 6 segundos de simulación. Se ve como  $\dot{q}_1$  (en azul) sigue una curva cosenoidal, anulándose en  $t = 1$  seg y  $t = 3$  seg ( $\cos \pi/2$ ) y ( $\cos 3/2\pi$ ), respectivamente. Y, consecuentemente, le cabe un análisis similar a  $\dot{q}_2$  (en rojo), que sigue una curva senoidal y se anula en  $t = 2$  seg y  $t = 4$  seg ( $\sin \pi$ ) y ( $\sin 2\pi$ ), respectivamente.



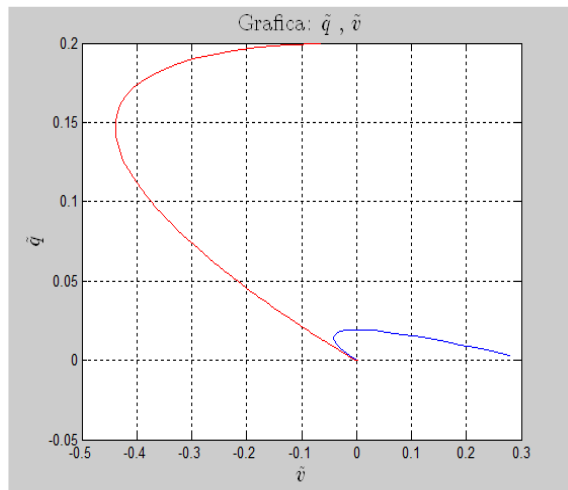
**Figura 10.** Trayectoria deseada en coordenadas cartesianas



**Figura 11.** Trayectoria obtenida en coordenadas cartesianas

En las figuras 10 y 11 se observan las evoluciones de las trayectorias deseadas y obtenidas del efector terminal del manipulador en su espacio de trabajo, en el lapso de simulación de 6 segundos. En  $t = 0$  seg, la figura 10 muestra que el extremo tiene coordenadas  $X = 2,98$  m y  $Y = 0,199$  m; esto se debe a que el eslabón 2 se encuentra levemente levantado un ángulo de  $0,2$  rad  $= 11,459^\circ$ . Entonces  $X = 2 + 1 \cdot \cos(11,459^\circ) = 2,98$  m; e  $Y = 1 \cdot \sin(11,459^\circ) = 0,199$  m. Por su parte, la figura 11 muestra con condiciones iniciales nulas ( $q_1 = 0$  y  $q_2 = 0$ ), que el efector terminal está en  $X = 3$  m y  $Y = 0$  m en el espacio cartesiano. Empezado a transcurrir el tiempo, se observa como el extremo se orienta hacia la trayectoria deseada de figura 10, y la logra seguir de manera satisfactoria.

Cabe señalar, que el desplazamiento inicial del extremo hacia la trayectoria deseada es el que requiere de mayores pares, como se infiere explorando la figura 8.



**Figura 12.** Plano fase para errores de posición y velocidad

En esta figura se ve que el entorno del punto de equilibrio ejerce una fuerza de atracción sobre las señales de velocidad articular y posición articular hacia el origen del espacio de estados ( $0^\circ, 0^\circ/\text{s}$ ) para ambas articulaciones. El atractor conduce necesariamente al error de posición y velocidad articular de las 2 articulaciones hacia origen del espacio de estados sin considerar las condiciones iniciales, por lo que este origen es globalmente asintóticamente estable. Dado que la condición inicial está en la zona de atracción del punto de equilibrio, el atractor captura las variables de estado  $\dot{q}, q$  en la línea de tiempo, hasta que se estacionan en las proximidades del punto de equilibrio.

#### 4. Conclusiones

En esta sección se presentan las conclusiones del presente trabajo y las futuras líneas de investigación.

##### 4.1. A nivel de conclusiones

- 1) Se propone proceso metodológico para el análisis de la técnica por par calculado
- 2) Se parte de una función candidata de Lyapunov definida positiva globalmente y radialmente desacotada, para la obtención del par de control y de la ecuación en lazo cerrado lineal y autónoma.
- 3) Esta ecuación es un sistema lineal multivariable desacoplado, con ecuaciones independientes.
- 4) Para matrices de diseño  $K_P$  y  $K_V$  definidas positivas el origen de esta ecuación en lazo cerrado expresada en términos del vector de estados  $\begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$ , es asintóticamente estable en forma global.
- 5) Se presenta un caso de estudio de un robot de 2 gdl, y se analiza la respuesta del dispositivo en base a

distintas gráficas: errores, par de control, trayectorias cartesianas obtenidas y deseadas.

- 6) Se complementó este análisis con un diagrama de plano fase en los errores de posición y velocidad.

##### 4.2. A nivel de futuras líneas de investigación

- Se están investigando los métodos de identificación paramétrica como regresión y mínimos cuadrados.
- Se estudia la implementación de controladores con retroalimentación dinámica del vector de estados.
- Realizar distintas simulaciones para otras condiciones iniciales y distintos parámetros físicos.

#### 5. Referencias

- [1] Reyes Cortés, F., "Robótica – Control de Robots Manipuladores". Ed. Alfaomega, México, 2011.
- [2] Barrientos, Antonio; Peñín, Luis Felipe; Balaguer Carlos y Aracil Rafael. "Fundamentos de Robótica". Ed. McGraw Hill. Madrid, 2007.
- [3] Ollero Baturone, A. "Robótica. Manipuladores y Robots Móviles". Ed. Marcombo, España, 2001.
- [4] Poliak, B., "Lyapunov Functions: An Optimization Theory Perspective". IFAC 2017
- [5] Saltaren, R., "Robótica Aplicada. Analisis y Diseño de Robots Paralelos y Seriales con Matlab". Ed. Dextra, 2014.
- [6] Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators. Santibáñez, V., Kelly, R Automatica Volume 33, Issue 4, April 1997, Pages 675-682.
- [7] Reyes Cortés, F., "Mecatrónica, Control y Automatización". Ed. Alfaomega, México, 2013.
- [8] Kelly, R., "Control de Robots Manipuladores". Ed. Pearson Prentice Hall, España, 2003.
- [9] Salgado, E. M., "Análisis de sistemas lineales". Ed. Pearson, 2005.
- [10] A Review of Fundamentals of Lyapunov Theory. Chutiphon Pukdeboon. The Journal of Applied Science, [2011] Vol. 10 No. 2.
- [11] M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, "Robot Modeling and Control", 2nd Edition, Ed. John Wiley and sons, 2020. ISBN: 9781119523994
- [12] M. Piórek, "Analysis of Chaotic Behavior in Non-linear Dynamical System", 1st Edition, Ed. Springer International Publisher, 2019. ISBN: 9783319948874
- [13] Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. Cruz-Zavala, e., Sanchez, T., Moreno, J. A., Nuño, E. IEEE conference on decision and control (CDC). 2018.