

Modelado y Seguimiento de Trayectorias para Dron Hexacóptero: Evaluación Comparativa de Estrategias PID, LQG y PI-LQG

Oscar Navas-Torres¹, Carlos Borrás Pinilla²

¹Grupo de investigación DICBot, Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Industrial de Santander, Colombia. Email: oscar2228337@correo.uis.edu.co

²Grupo de investigación DICBot, Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Industrial de Santander, Colombia. Email: cborras@uis.edu.co

Resumen

Este estudio aborda el control dinámico de un hexacóptero mediante el formalismo de Lagrange, considerando fuerzas de arrastre y efectos giroscópicos. Se desarrollan y comparan tres controladores (PID, LQG y PI-LQG) con el objetivo de contribuir al entendimiento de la dinámica y el control de vehículos aéreos no tripulados. Estos vehículos son cada vez más utilizados en diversas industrias por su vuelo omnidireccional, despegue vertical y bajo costo. En este artículo se incluye la obtención de las ecuaciones de movimiento, extracción de parámetros de un dron real y diseño de controladores. Simulaciones numéricas con y sin ruido revelan que el controlador LQG comparado con el PID tiene una menor sobreelongación y tiempo de establecimiento, aunque presenta un error en estado estable en la posición. La estrategia PI-LQG, al agregar el componente integral, elimina este error, destacándose como la mejor opción entre las estrategias evaluadas.

Palabras clave: Hexacóptero, Formalismo de Lagrange, Control dinámico, Vehículos aéreos no tripulados (UAVs), Controlador PID, Controlador LQG, Controlador PI-LQG, Ecuaciones de movimiento.

Abstract

This study addresses the dynamic control of a hexacopter using Lagrangian formalism, considering drag forces and gyroscopic effects. Three controllers (PID, LQG, and PI-LQG) are developed and compared to contribute to the understanding of the dynamics and control of unmanned aerial vehicles. These vehicles are increasingly used in various industries for their omnidirectional flight, vertical takeoff, and low cost. The article includes obtaining the equations of motion, extracting parameters from a real drone, and controller design. Numerical simulations with and without noise reveal that the LQG controller compared to the PID has lower overshoot and settling time, although it has a steady-state error in position. The PI-LQG strategy, by adding the integral component, eliminates this error, emerging as the best option among the evaluated strategies.

Keywords: Hexacopter, Lagrange formalism, Dynamic control, Unmanned aerial vehicles (UAVs), PID controller, LQG controller, PI-LQG controller, Equations of motion

1 Introducción

Los Vehículos Aéreos No Tripulados (VANT) de tipo multirotor han adquirido una relevancia crucial en diversos sectores como la agricultura [1], el transporte [2], la vigilancia [3] y el monitoreo. Estos dispositivos presentan ventajas notables, como despegue vertical, movilidad omnidireccional y costos de fabricación asequibles. Esto ha incentivado a un aumento en la investigación enfocada hacia drones, abarcando desde el modelado matemático de la dinámica hasta el desarrollo de sistemas de control y su implementación práctica en varias industrias.

Aunque la mayoría de las investigaciones han focalizado su atención en el cuadricóptero, por ser el

tipo de dron más común [4-6], el interés se ha dirigido hacia vehículos con más rotores, como el hexacóptero; este al tener un mayor número de rotores, tiene una mayor tolerancia a fallos, ya que puede volar incluso con algunos de sus motores defectuosos como se puede ver en las investigaciones realizadas en [7-8]. Por otra parte, para la obtención de las ecuaciones de movimiento del sistema (EMS) se suele emplear dinámica Newtoniana en lugar de la dinámica Lagrangiana, a pesar de las ventajas inherentes de este último método basado en energías. Además, son escasos los modelos que consideran las fuerzas de arrastre y los efectos giroscópicos, como en [4].

Con respecto a los sistemas de control para hexacópteros, en [9], se llevó a cabo una comparativa

de desempeño entre el control PID y el control por modos deslizantes; en [10], se desarrolló una comparativa entre el control PID y el control de retroceso o *backstepping*; en [11], se diseñó un controlador LQR con un integrador agregado, y en [12], se desarrolló un controlador H-infinito. Aún falta realizar controladores y comparaciones de desempeño entre otros tipos de estrategias de control.

Este artículo presenta el procedimiento detallado para la obtención de las EMS para el dron hexacóptero mediante dinámica Lagrangiana, considerando tanto las fuerzas de arrastre parasitas como los efectos giroscópicos. Además, se desarrollan y analizan tres controladores basados en control PID, LQG y PI-LQG, para el seguimiento de trayectoria, con el objetivo de contribuir a la comprensión del modelado y los sistemas de control aplicados al dron hexacóptero.

La estructura del artículo sigue una progresión lógica, se explica primero como se obtiene las EMS y se diseñan los tres controladores a comparar. Luego en la sección de resultados se analiza el desempeño de los controladores mediante simulación numérica por medio de una comparación de desempeño en presencia de ruido de proceso y de medida. Finalmente, las conclusiones destacan las ventajas del formalismo de Lagrange y se determina cuál controlador mostró un mejor rendimiento en las condiciones especificadas.

2 Materiales y Métodos

En esta sección se explica cómo se obtuvieron las EMS, y el procedimiento a seguir para diseñar los controladores.

2.1 Obtención de las ecuaciones del sistema mediante el formalismo de Lagrange

El formalismo de Lagrange es un método basado en energías, que se utiliza para derivar directamente las EMS. En este se calculan la energía cinética y potencial total del sistema. Se utiliza una cantidad escalar conocida como Lagrangiano L , el cual es la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema, ver Ecuación (1).

$$L = E_K - E_P \quad (1)$$

2.1.1 Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler se emplean para determinar la orientación de un cuerpo rígido. Estos ángulos describen la orientación de un sistema de referencia fijo al cuerpo (SRC) no inercial en relación con un sistema de referencia inercial (SRI) a través de tres rotaciones secuenciales alrededor de los ejes del SRC. En este texto, se adopta la convención de guiñada-cabeceo-balanceo. De acuerdo con esta convención, el ángulo

de rotación con respecto al eje z se denomina ángulo de guiñada ψ , el ángulo de rotación con respecto al eje y se denomina ángulo de cabeceo θ , y el ángulo de rotación con respecto al eje x se denomina ángulo de balanceo ϕ .

Para dar la orientación del SRC en relación con el SRI en cualquier instante, se realiza el producto de tres matrices de rotación (2), (3), (4), aplicadas alrededor de cada eje del SRC y las orientaciones iniciales de los vectores unitarios.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Los vectores unitarios del SRI se dan en la Ecuación (5). En este texto se usa el subíndice SRC, cuando se busca indicar que los vectores unitarios son del SRC.

$$\begin{aligned} \hat{i} &= [1, 0, 0]^T \\ \hat{j} &= [0, 1, 0]^T \\ \hat{k} &= [0, 0, 1]^T \end{aligned} \quad (5)$$

2.1.2 Variables Generalizadas

El dron se modela como un cuerpo rígido con movimiento tridimensional de seis grados de libertad (GDL). Para indicar la posición del dron, basta con especificar la posición del SRC con respecto al SRI dando sus coordenadas cartesianas (x, y, z) . Mientras que para definir la orientación se usan los ángulos de Euler. El origen del SRC se coloca en el CM del dron. Los GDL formaron el vector de coordenadas generalizadas q , mostrado en (6).

$$q = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \quad (6)$$

El vector de velocidades generalizadas \dot{q} , dado en (7) corresponden a la variación instantánea de q con respecto al tiempo, es decir las tres velocidades lineales y las tres velocidades angulares.

$$\dot{q} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \quad (7)$$

Y a su vez la variación de \dot{q} con respecto al tiempo, es el vector de las aceleraciones generalizadas \ddot{q} , dado en la Ecuación (8).

$$\ddot{q} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]^T \quad (8)$$

2.1.3 Cálculo de la energía cinética del dron.

La energía cinética traslacional del dron E_{CT} , se obtiene mediante la Ecuación (9), donde m_D es la masa del

drón y \vec{V}_D es la velocidad de translación dada en la Ecuación (10).

$$E_{CT} = \frac{1}{2} m_D \cdot \vec{V}_D \cdot \vec{V}_D \quad (9)$$

$$\vec{V}_D = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k} \quad (10)$$

La energía cinética rotacional E_{CR} , se calcula utilizando la ecuación (12). La matriz de inercia del drón con respecto a los vectores del cuerpo se simboliza con $I_{D/SRC}$, el drón se considera simétrico con respecto a los planos X-Z y Y-Z, por lo que esta matriz es diagonal, ver Ecuación (11). La ecuación (13) permite obtener la velocidad angular como función de la variación instantánea de los ángulos de Euler con respecto al tiempo [13].

$$I_{D/SRC} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$E_{CR} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\omega}_{D/SRC}^T \cdot I_{D/SRC} \cdot \vec{\omega}_{D/SRC} \quad (12)$$

$$\vec{\omega}_{D/SRC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

2.1.4 Cálculo de la energía potencial del drón.

El cambio de energía potencial ocurre debido al desplazamiento $\Delta \vec{r}$ del drón con masa m_D en un campo gravitatorio de gravedad g . En el escenario de un campo conservativo, la energía potencial se determina mediante la Ecuación (14), donde Δz representa el cambio en la altura del centro de masa (CM).

$$E_p = -(-m_D \cdot g \cdot \hat{k}) \cdot \Delta \vec{r} = m_D \cdot g \cdot \Delta z \quad (14)$$

2.1.5 Fuerzas generalizadas

La Figura 1, muestra una vista superior del drón y la numeración de los propulsores además del sentido de giro de los motores.

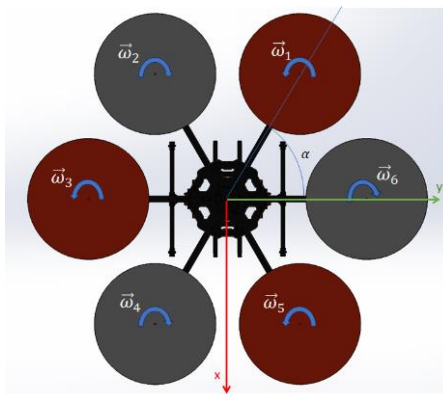


Figura 1. Vista superior del hexacóptero y numeración de los propulsores. Fuente: Autores.

Cada propulsor produce una fuerza de empuje y un torque de reacción a la rotación del motor, ambos paralelos al vector unitario del cuerpo \hat{k}_{SRC} . La fuerza de empuje \vec{F}_E tiene una relación directamente proporcional con el cuadrado de la velocidad angular del propulsor, siendo K_T la constante de empuje, que depende del propulsor. La fuerza neta producida por los seis motores se calcula usando la Ecuación (15).

$$\vec{F}_E = K_T \left(\sum_{i=1}^6 \omega_i^2 \right) \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot \hat{k} \quad (15)$$

La fuerza de arrastre parasita \vec{F}_A , tiene lugar cuándo hay una velocidad relativa del drón con respecto al aire. La \vec{V}_{rel} (con v_x, v_y, v_z como sus componentes) es la diferencia entre la velocidad del drón \vec{V}_D y la velocidad del viento \vec{V}_w , se obtiene mediante la Ecuación (16).

$$\vec{V}_{rel} = [v_x, v_y, v_z]^T = \vec{V}_D - \vec{V}_w \quad (16)$$

\vec{F}_A se puede estimar como el producto de la \vec{V}_{rel} , multiplicada por su valor absoluto, y el coeficiente de arrastre en cada dirección del sistema de coordenadas, simbolizados por medio de c_x, c_y y c_z respectivamente, ver Ecuación (17). Debido a que los ángulos de Euler se mantienen cercanos a cero, no se tomaron en cuenta los efectos del cambio de orientación del drón.

$$\vec{F}_A = c_x v_x |v_x| \hat{i} + c_y v_y |v_y| \hat{j} + c_z v_z |v_z| \hat{k} \quad (17)$$

La ecuación (18) muestra la relación entre las componentes de la fuerza total neta \vec{F}_{Neta} y las fuerzas generalizadas de las coordenadas generalizadas de posición, Q_x, Q_y, Q_z .

$$\vec{F}_{Neta} = [Q_x, Q_y, Q_z]^T = \vec{F}_E - \vec{F}_A \quad (18)$$

2.1.6 Torques generalizados

El giro del motor produce un torque de reacción contrario al sentido de rotación del motor. El torque motor es directamente proporcional al cuadrado de la rotación del propulsor, con constante de proporcionalidad K_Q , la cual se denomina constante de torque motor. La ecuación (19) permite calcular el torque del motor neto $\vec{\tau}_M$.

$$\vec{\tau}_M = K_Q (\omega_2^2 + \omega_4^2 + \omega_6^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2 - \omega_5^2) \cdot \hat{k}_{SRC} \quad (19)$$

El torque giroscópico neto $\vec{\tau}_G$ se produce por la rotación del drón y los propulsores se define como el producto cruz entre el momento angular de los propulsores \vec{L}_{SRC} , y la velocidad angular drón $\vec{\omega}_{D/SRC}$,

ecuación (20). Donde I_{prop} es el momento de inercia de los propulsores con respecto a su eje de rotación.

$$\vec{\tau}_G = I_{prop} \cdot (\omega_1^2 + \omega_3^2 + \omega_5^2 - \omega_2^2 - \omega_4^2 - \omega_6^2) \cdot \hat{k}_{SRC} \times \vec{\omega}_{D/SRC} \quad (20)$$

Las fuerzas de empuje producen adicionalmente torques que afectan las coordenadas generalizadas θ , y ϕ , a los que se les denomina $\vec{\tau}_{F\theta}$ y $\vec{\tau}_{F\phi}$. Basado en la Figura 1 se deducen las ecuaciones (21) y (22) que permiten calcular estos torques.

$$\vec{\tau}_{F\theta} = K_T l_1 \sin(\alpha) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_4^2 - \omega_5^2) \cdot \hat{j}_{SRC} \quad (21)$$

$$\vec{\tau}_{F\phi} = K_T \left(l_1 \cos(\alpha) \cdot (\omega_1^2 + \omega_5^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2) + l_2 \cdot (\omega_6^2 - \omega_4^2) \right) \cdot \hat{i}_{SRC} \quad (22)$$

Donde la distancia en el plano X-Y desde el eje Z a los motores 1, 2, 4, 5 se denota por l_1 y a los motores 3, 6 se denota por l_2 . La ecuación (23) muestra la relación entre los componentes del torque neto, $\vec{\tau}_{Neto}$, con el torque generalizado de cada una de las coordenadas generalizadas correspondiente a los ángulos de Euler.

$$\vec{\tau}_{Neto} = [Q_\phi, Q_\theta, Q_\psi]^T = \vec{\tau}_{F\phi} + \vec{\tau}_{F\theta} + \vec{\tau}_{motor} + \vec{\tau}_G \quad (23)$$

2.1.7 Ecuaciones de movimiento

Para cada coordenada generalizada "i", la EMS se utilizó la ecuación de Euler-Lagrange dada en la Ecuación (24). Esto se hizo de una manera eficiente por medio de la caja de herramienta de operaciones simbólicas del programa Matlab versión R2023b.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (24)$$

Donde el vector Q_i , ver Ecuación (25), corresponde a las fuerzas o torques generalizados, provenientes de fuerzas de los actuadores o perturbaciones.

$$Q = [Q_x, Q_y, Q_z, Q_\phi, Q_\theta, Q_\psi]^T \quad (25)$$

El resultado obtenido se escribe de forma compacta por medio de (26).

$$M\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = Q \quad (26)$$

Donde M se conoce como la matriz de masa del sistema, para este caso es una matriz cuadrada de 6 filas donde la mayoría de sus valores son ceros, en el conjunto de ecuaciones (27) mostrado a continuación se dan los valores de los términos distintos de cero.

$$M(1,1) = m$$

$$M(2,2) = m$$

$$M(3,3) = m$$

$$M(4,4) = I_{xx} \quad (27)$$

$$M(4,6) = M(6,4) = -I_{xx} \sin(\theta)$$

$$M(5,5) = I_{zz} + (I_{yy} - I_{zz}) \cos^2(\phi)$$

$$M(5,6) = M(6,5) = (I_{yy} - I_{zz}) \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\phi)$$

$$M(6,6) = I_{xx} + (I_{yy} - I_{xx}) \cos^2(\theta) + (I_{zz} - I_{yy}) \cos^2(\phi) \cos^2(\theta)$$

El vector $H(q, \dot{q})$ representa los términos de aceleraciones centrífugas y de Coriolis del sistema, sus componentes se dan en el conjunto de ecuaciones (28).

$$H(1,1) = 0$$

$$H(2,1) = 0$$

$$H(3,1) = -gm$$

$$H(4,1) \quad (28)$$

$$= 0.5(I_{zz} - I_{yy})\dot{\theta}^2 \sin(2\phi) + (I_{xx} - I_{yy})\dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta) + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi}^2 \cos(\phi) \cos^2(\theta) \sin(\phi) + 2(I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi} \dot{\theta} \cos^2(\phi) \cos(\theta) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos^2(\phi) \cos\theta$$

$$H(5,1)$$

$$= \frac{I_{xx} \dot{\psi}^2 \sin(2\theta)}{2} - I_{xx} \dot{\phi} \dot{\psi} \cos(\theta) + (I_{yy} - I_{zz}) \dot{\phi} \dot{\theta} \sin(2\phi) - (I_{zz} \cos^2(\phi) + I_{yy} \sin^2(\phi)) \dot{\psi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + (I_{zz} - I_{yy}) \dot{\phi} \dot{\psi} \cos^2(\phi) \cos(\theta) + (I_{yy} - I_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi} \cos(\theta) \sin^2(\phi)$$

$$H(6,1) = (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\theta) I_{yy}$$

$$- I_{xx} \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(2\theta) + (I_{yy} - I_{zz}) \dot{\theta}^2 \cos(\phi) \sin(\phi) \sin(\theta) + 2(I_{zz} - I_{yy}) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos^2(\phi) \cos(\theta) - 2 I_{yy} \dot{\phi} \dot{\psi} \cos(\phi) \cos^2(\theta) \sin(\phi) + 2(I_{zz} - I_{yy}) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos^2(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta)$$

La Ecuación (26) constituye un sistema lineal de ecuaciones para las aceleraciones, por lo que se pueden resolver para despejar los elementos del vector \ddot{q} , dando como resultado las EMS, estas no se incluyen el artículo debido a su extensión.

2.2 Representación en espacio de estados y diseño de controladores

En esta sección se explican: la representación en espacio de estados del dron tanto no-lineal como lineal, el proceso de linealización y se diseñan tres

controladores con el objetivo de realizar un seguimiento de trayectoria de posición usando las estrategias de control PID, control LQG y control PI-LQG.

2.2.1 Representación no lineal en espacio de estados

Hasta este punto se han encontrado las aceleraciones generalizadas en función de las velocidades y coordenadas generalizadas. El siguiente paso que se realizó fue sustituir las coordenadas y velocidades generalizadas por variables de estado. La Ecuación (29) muestra el vector de estados $X(t)$ y a que variable generalizada corresponde cada variable de estado.

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}] \\ &= [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}] \end{aligned} \quad (29)$$

El vector de entradas al sistema $u(t)$, ver ecuación (30), está conformado por las acciones de control, que en este caso corresponden a las velocidades angulares al cuadrado de los motores.

$$\begin{aligned} u(t) &= [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T \\ &= [\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2, \omega_5^2, \omega_6^2]^T \end{aligned} \quad (30)$$

Se define el vector de las perturbaciones del sistema, dado en la Ecuación (32), que incluye las componentes de la velocidad del viento externo.

$$d(t) = [v_x, v_y, v_z]^T \quad (31)$$

La representación no lineal del sistema requiere también de la variación del vector de estados con respecto al tiempo, $\dot{X}(t)$. En la ecuación (32) se muestra a que variables de estado y a que aceleraciones generalizadas corresponden los componentes del vector $\dot{X}(t)$.

| | |
|---|------|
| $\begin{aligned} \dot{X}(t) &= [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6, \dot{x}_7, \dot{x}_8, \dot{x}_9, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{11}, \dot{x}_{12}] \\ &= [x_2, \dot{x}, x_4, \dot{y}, x_6, \dot{z}, x_8, \dot{\phi}, x_{10}, \dot{\theta}, x_{12}, \dot{\psi}] \end{aligned}$ | (32) |
|---|------|

Debido a que previamente se realizó el despeje de las aceleraciones de la ecuación (26) en función de las velocidades y coordenadas generalizadas, se puede realizar la integración numérica de $\dot{X}(t)$ por medio del programa simulación numérica Simulink R2023b, para obtener $X(t)$ en cada instante.

2.2.2 Determinación de parámetros del sistema

Se realizó un modelo tridimensional del dron hexacóptero que se tiene como referencia, usando el programa de diseño asistido por computadora SolidWorks 2023, con el objetivo de obtener las

matrices de inercia y la posición del centro de masa. También se utilizó la herramienta de dinámica de fluido computacional disponible en este, con el objetivo de estimar los coeficientes de arrastre c_x , c_y , c_z . Las constantes K_T y K_Q . Fueron proporcionadas por el fabricante de los propulsores. En la Tabla 1 se muestran los valores de los parámetros del dron.

Tabla 1. Parámetros del sistema

| Constante | Valor | Unidad |
|------------|----------|----------------------|
| m_D | 0.884 | kg |
| I_{prop} | 1.058E-4 | kg-m ² |
| l_1 | 0.357 | m |
| l_2 | 0.343 | m |
| c_x | 1.616E-2 | N- s ² /m |
| c_y | 1.616E-2 | N- s ² /m |
| c_z | 4.98E-2 | N- s ² /m |
| α | 1.0472 | rad |
| I_{xx} | 3.814E-2 | kg-m ² |
| I_{yy} | 3.744E-2 | kg-m ² |
| I_{zz} | 7.109E-2 | kg-m ² |
| g | 9.81 | m/s ² |
| K_T | 2.19E-5 | N- s ² |
| K_Q | 1.99E-7 | N-m-s ² |

Fuente: Autores.

El resultado que se obtiene luego de remplazar los parámetros del sistema de la Tabla 1, en la ecuación (32) es el sistema no lineal en espacio de estados.

2.2.3 Linealización del sistema

Un sistema en espacio de estados linealizado se representa por medio de las ecuaciones (33) y (34). En donde A es la matriz de estado, B es la matriz de entrada, C es la matriz de salida, D es la matriz de transmisión directa, $y(t)$ es la salida linealizada del sistema y E es la matriz de perturbación.

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t) + E \cdot d(t) \quad (33)$$

$$y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot u(t) \quad (34)$$

El punto de equilibrio seleccionado es en el que el dron se encuentra en sobrevuelo estático o *hovering* en el que los valores de las variables generalizadas son cero. Para los valores iniciales se supone que el SRI está a una altura que evita el contacto del dron con el suelo y que SRC y SRI coinciden en el instante inicial. El valor de las acciones de control para este punto de equilibrio se muestra en la Ecuación (35).

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = \frac{g m}{6 K_T} \quad (35)$$

Para obtener la matriz A se calculó el jacobiano entre el vector $\dot{X}(t)$ con respecto a $X(t)$ esta se muestra en (36). Para obtener la matriz B se calculó el jacobiano entre el vector $\dot{X}(t)$ con respecto al vector $u(t)$, esta se muestra en (37), la matriz E , debido a que los vientos son cero en estado de equilibrio es una matriz de ceros

de 12 filas y 3 columnas. Para todas las matrices se sustituyeron los valores del vector de entradas en equilibrio.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_T}{m} & \frac{K_T}{m} & \frac{K_T}{m} & \frac{K_T}{m} & \frac{K_T}{m} & \frac{K_T}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & -\sigma_1 & -\frac{K_T l_2}{I_{xx}} & -\sigma_1 & \sigma_1 & \frac{K_T l_2}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_2 & 0 & -\sigma_2 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_Q}{I_{zz}} & \frac{K_Q}{I_{zz}} & -\frac{K_Q}{I_{zz}} & \frac{K_Q}{I_{zz}} & -\frac{K_Q}{I_{zz}} & \frac{K_Q}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Donde:

$$\sigma_1 = \frac{K_T l_1 \sin \alpha}{I_{xx}}, \sigma_2 = \frac{K_T l_1 \cos \alpha}{I_{yy}}$$

Se sustituyeron las variables simbólicas por los valores de las constantes dados en la Tabla 1, para obtener las matrices A y B con valores numéricos. Los valores medidos indirectamente fueron las coordenadas generalizadas por medio de una unidad de medición inercial, IMU por sus siglas en inglés, esto permite definir la matriz C , que se muestra en (38). La matriz D es una matriz de ceros de 6 filas y 9 columnas.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

2.2.4 Controlador PID

Un controlador PID es propuesto para cada uno de los estados medidos. En la Figura 2, se muestra la estructura del controlador el cual fue diseñado usando el programa Simulink. Debido a que y y x no se pueden controlar directamente, se implementó un control PID en cascada, ya que para controlar dichos estados se requiere una rotación con respecto a ϕ y θ respectivamente. Adicionalmente el bloque de función *references*, recibe los valores de referencia para el seguimiento de trayectoria y los valores medidos de la posición y el ángulo de guiñada, para entregar como resultado el error de posición expresado en el SRC.

El control PID aplicado a drones, requiere que se desacoplen las acciones de control en cuatro, una fuerza de empuje: F , y tres torques: T_1 , T_2 y T_3 con respecto a los ejes del SRC. El producto entre la matriz M_x , dada en la Ecuación (39), y el vector formado por las cuatro acciones de control da como resultado las velocidades de rotación al cuadrado de los rotores, ver ecuación (40), estas velocidades pasan por un limitador antes de entrar a la planta del dron.

$$M_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{6K_T} & \frac{1}{2K_T l_1 \cos(\alpha)} & \frac{1}{2K_T l_1 \sin(\alpha)} & \frac{-1}{6K_Q} \\ \frac{1}{6K_T} & \frac{-1}{2K_T l_1 \cos(\alpha)} & \frac{1}{2K_T l_1 \sin(\alpha)} & \frac{1}{6K_Q} \\ \frac{1}{6K_T} & \frac{-1}{2K_T l_2} & 0 & \frac{-1}{6K_Q} \\ \frac{1}{6K_T} & \frac{-1}{2K_T l_1 \cos(\alpha)} & \frac{-1}{2K_T l_1 \sin(\alpha)} & \frac{1}{6K_Q} \\ \frac{1}{6K_T} & \frac{1}{2K_T l_1 \cos(\alpha)} & \frac{1}{2K_T l_1 \sin(\alpha)} & \frac{-1}{6K_Q} \\ \frac{1}{6K_T} & \frac{1}{2K_T l_2} & 0 & \frac{1}{6K_Q} \end{bmatrix} \quad (39)$$

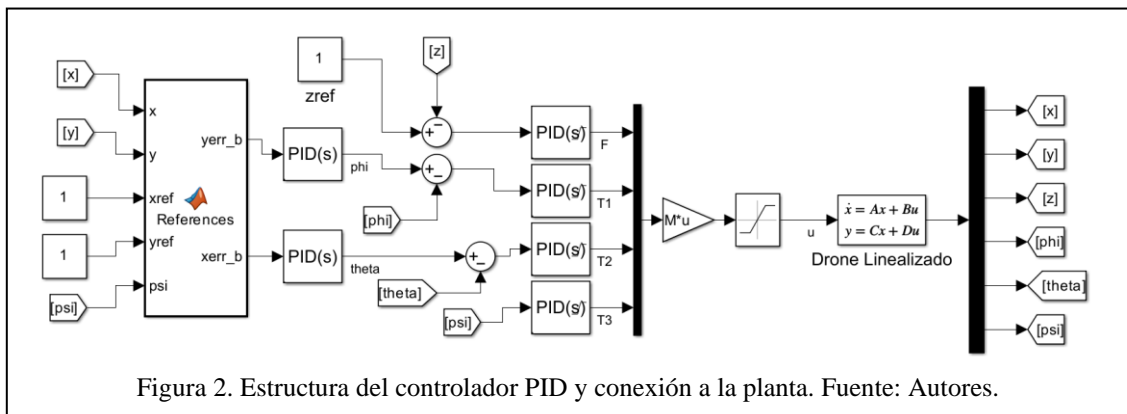
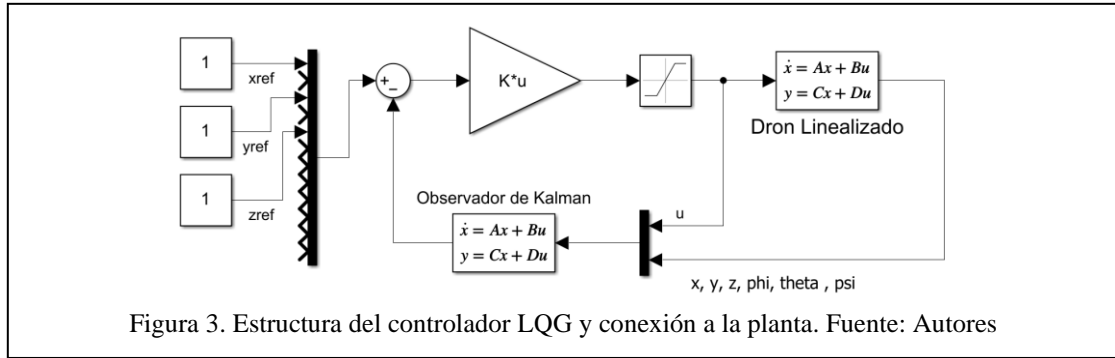


Figura 2. Estructura del controlador PID y conexión a la planta. Fuente: Autores.



$$[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T = M \cdot [F, T_1, T_2, T_3]^T \quad (40)$$

La ecuación de transferencia de los controladores PID (C_{PID}), está dada por ecuación (41), siendo P_c el factor de la acción proporcional, I_c el factor de la acción integral, D_c el factor de la acción derivativa y N el coeficiente del filtro. Los valores de las constantes obtenidos luego del proceso de sintonización para cada uno de los controladores se dan en la Tabla 2.

$$C_{PID} = P_c + I_c \frac{1}{s} + D_c \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \quad (41)$$

Tabla 2. Valores de los factores de los controladores PID para los controladores sintonizados

| Variable controlada | P_c | I_c | D_c | N |
|---------------------|---------|----------|--------|------|
| $x_1 = x$ | 0.0993 | 0.00363 | 0.603 | 717 |
| $x_3 = y$ | -0.112 | -0.00456 | -0.659 | 768 |
| $x_5 = z$ | 3.43 | 0.734 | 3.94 | 24.9 |
| $x_7 = \phi$ | 0.238 | 0.112 | 0.124 | 54.5 |
| $x_9 = \theta$ | 0.348 | 0.163 | 0.182 | 54.5 |
| $x_{11} = \psi$ | -0.0526 | -0.00491 | -0.138 | 10.9 |

Fuente: Autores.

2.2.5 Controlador LQG

La estructura del controlador LQG desarrollado para el dron, se muestra en la Figura 3, este controlador está compuesto por un observador de Kalman en combinación con un controlador regulador cuadrático lineal LQR, por sus siglas en inglés. Un conjunto de variables de estados para los cuales el sistema es observable es: $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}$, para estos se

diseña el observador de Kalman, el cual basado en los estados medidos y los valores del vector de entradas logra estimar el valor de los estados restantes. Los valores estimados se restan a los de referencia y este error entra al controlador LQR, de este salen las acciones de control que pasan por un limitador antes de entrar al sistema.

En la estrategia de control LQR se busca optimizar la acción de control con respecto al desempeño esperado, para esto se requieren seleccionar una matriz semidefinida positiva Q que penaliza el desempeño, y una matriz definida positiva R que penaliza la acción de control[14]. Las matrices Q y R fueron determinadas por prueba y error y se muestran en las Ecuaciones (42) y (43) respectivamente.

$$Q = \text{diag}([10^4, 1, 10^4, 1, 10^6, 1, 10^2, 1, 10^2, 1, 10^2, 1]) \quad (42)$$

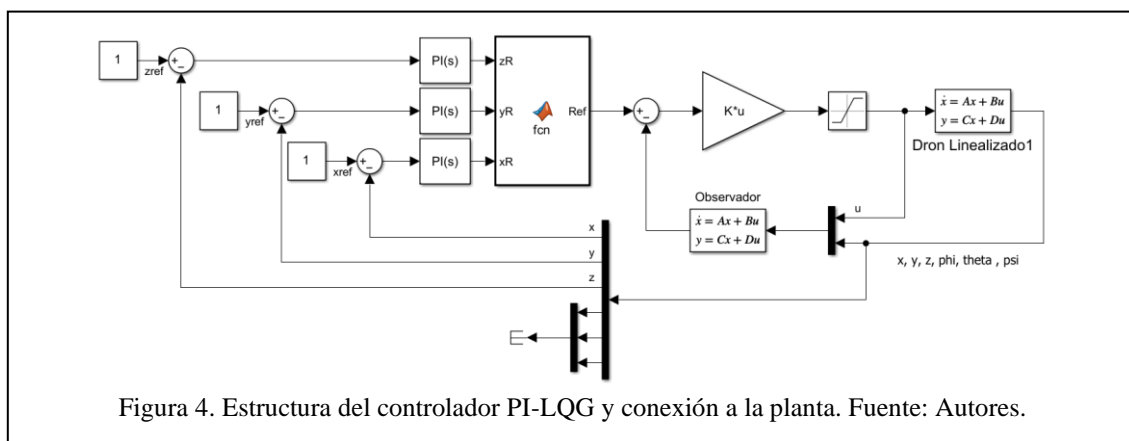
$$R = 10^{-4} \cdot \text{diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1]) \quad (43)$$

La ley de control viene dada por la ecuación (44) donde K es la matriz de ganancia de retroalimentación de estado. Inicialmente se resolvió la ecuación de Riccati, dada por la ecuación (45) asociada para P y luego se encontró K por medio de la ecuación (46) de forma numérica por medio de Matlab.

$$u = -K \cdot X \quad (44)$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (45)$$

$$K = R^{-1}B^T P \quad (46)$$



2.2.6 Controlador PI-LQG

En la tercera estrategia de control se toma como punto de partida el controlador LQG diseñado y se agregan controladores PI con el objetivo de eliminar el error en estado estable en la posición. La estructura del controlador y su conexión a la planta son mostrados en la Figura 4. La ecuación de transferencia del controlador PI sintonizado se da en la ecuación (47), los valores de las constantes para cada uno de los controladores son dadas en la Tabla 3.

$$C_{PI} = P_c + I_c \frac{1}{s} \quad (47)$$

Tabla 3. Valores de los controladores PI para el controlador PI-LQG

| Variable controlada | P_c | I_c |
|---------------------|-------|-------|
| $x_1 = x$ | 0.937 | 1.77 |
| $x_3 = y$ | 0.207 | 0.654 |
| $x_5 = z$ | 0.973 | 1.77 |

Fuente: Autores.

3 Resultados

Uno de los resultados de este estudio fue la obtención eficiente del modelo no lineal del sistema, incorporando efectos giroscópicos y la fuerza de arrastre parasita, representados en las (EMS). Este modelo se obtuvo de manera eficaz mediante el método

de Lagrange y un programa para operaciones simbólicas (Ecuación (26)).

Los controladores fueron evaluados numéricamente utilizando el modelo no lineal implementado en Simulink. Para simular las mediciones de los estados con la IMU de referencia BMI323, se incluyeron errores extraídos de la información del fabricante para los giroscopios y acelerómetros como ruido blanco de banda limitada, con una frecuencia de 100 Hz.

Dado que las mediciones implicaban aceleraciones y velocidades angulares, se realizaron las integraciones correspondientes para obtener las coordenadas de posición y orientación del sistema, esto junto con el error de medida agregado permite evaluar los controladores en condiciones más realistas.

Durante la realización del experimento, se llevó a cabo una prueba en la cual se buscaba trasladar al dron en un lapso de 120 segundos. Las coordenadas de dichos puntos se mantuvieron constantes en las tres dimensiones. En esta prueba, tanto ruidos de proceso como de medida fueron incorporados. Como ruido de proceso, se simuló velocidades de viento de 3 m/s en la dirección del eje x y de -3 m/s en la dirección del eje y, ambas referidas al SRI. El seguimiento de trayectoria fue implementado con el propósito de evaluar el rendimiento de los tres controladores en este

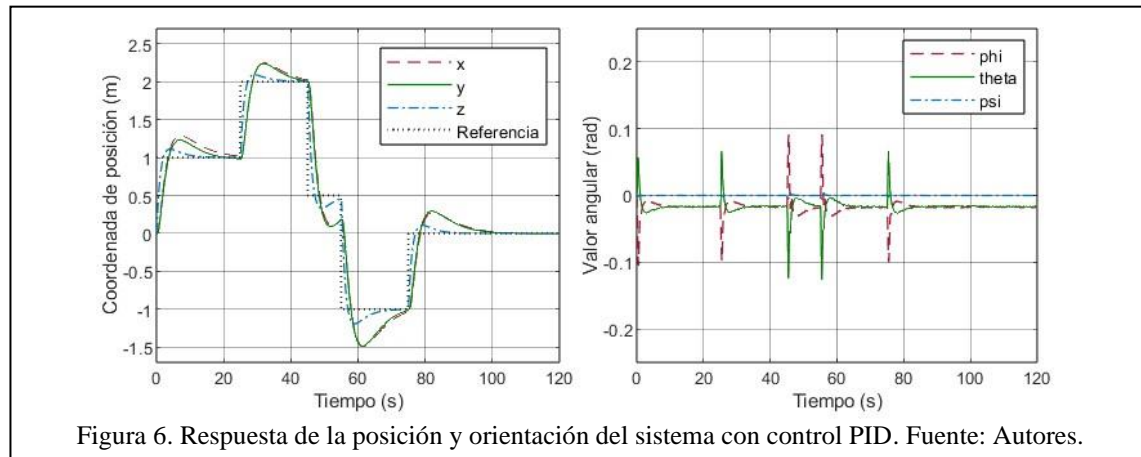


Figura 6. Respuesta de la posición y orientación del sistema con control PID. Fuente: Autores.

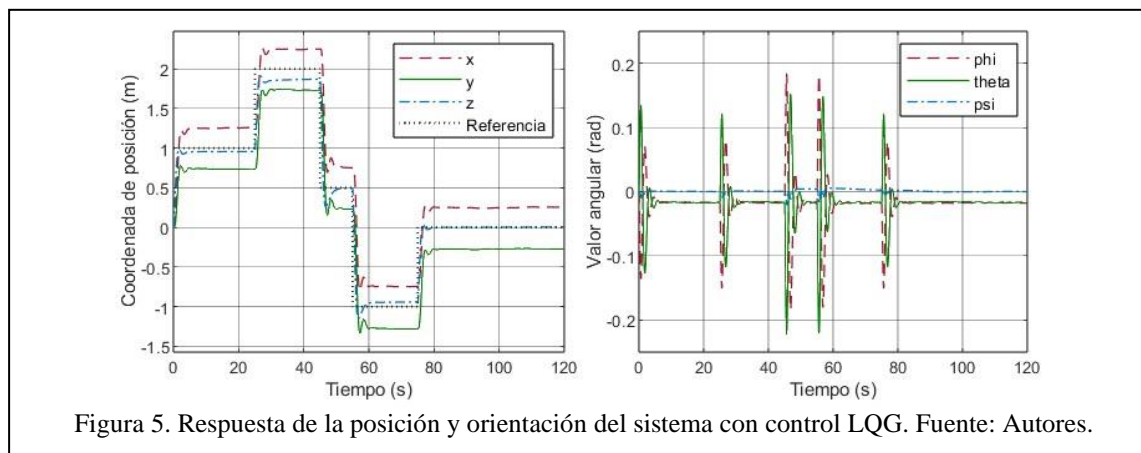
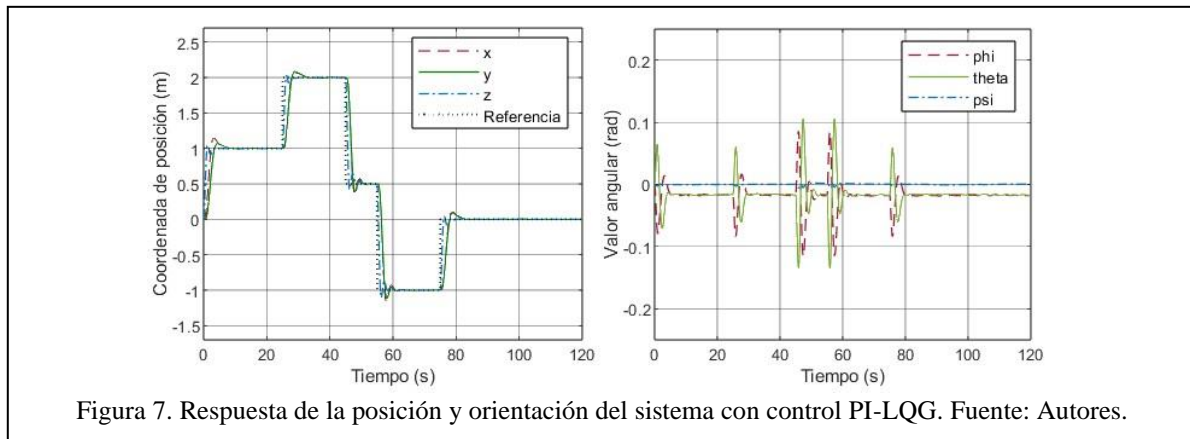


Figura 5. Respuesta de la posición y orientación del sistema con control LQG. Fuente: Autores.



escenario. Los comportamientos de las coordenadas de posición y angulares para las estrategias PID, LQG y PI-LQG durante el experimento descrito se ilustran en las Figura 5, Figura 6, Figura 7, respectivamente.

En la Figura 6 se evidencia un error en estado estable del controlador LQG, que para las coordenadas x e y no dependió del valor de la referencia, mientras que para la altura z sí lo hizo, esto es debido a las no linealidades del sistema.

En todas las estrategias de control, el dron mantuvo una ligera inclinación en los ángulos θ y ϕ para conservar la posición ante las perturbaciones causadas por vientos externos. La presencia de ruidos de medida no afectó considerablemente la respuesta del sistema gracias al filtrado eficiente proporcionado por el filtro de Kalman de la estrategia LQG y los componentes integral y derivativo en el control PID.

Tabla 4. Parámetros de respuesta en el tiempo del sistema con los distintos controladores

| | | Sobreeelongación % | Tiempo de establecimiento (s) | Error en estado estable% |
|--------|---|--------------------|-------------------------------|--------------------------|
| PID | x | 28.7 | 18.9 | 0 |
| | y | 23.0 | 17.7 | 0 |
| | z | 27.7 | 12.1 | 0 |
| LQG | x | 1.6 | 4.5 | 26 |
| | y | 7.7 | 5.1 | -21 |
| | z | 0 | 4.9 | -10 |
| PI-LQG | x | 15.3 | 6.25 | 0 |
| | y | 7.7 | 6.97 | 0 |
| | z | 26.1 | 4.33 | 0 |

Fuente: Autores

La Tabla 4 presenta los tiempos de establecimiento, el porcentaje de sobreelongación y el error en estado estable para cada estrategia de control durante el primer intervalo de 30 segundos, en los que el dron se desplaza al punto (1,1,1).

Aunque el controlador LQG exhibió menor sobreelongación y tiempo de asentamiento en comparación con el control PID, se detectó un error en

estado estable tanto en la coordenada x estando un 25% por encima de la medida como en la coordenada y estando un 21% por debajo de la medida, lo cual es inaceptable para aplicaciones donde el control de posición del dron deba ser muy preciso, esto es debido a que el controlador LQG junto con la planta no presentan integradores que puedan eliminar el estado estable, aunque logra optimizar la relación entre desempeño y energía de los actuadores.

No obstante, al incorporar el componente integral y transformar el controlador LQG en PI-LQG, esta estrategia sobresalió al mostrar tiempos y sobreelongación inferiores al PID, sin presentar errores en estado estable, pero el tiempo de establecimiento mayor comparado con el controlador LQG (que se estabiliza, pero con error en estado estable alto). Esto se debe a que se combinan las ventajas del controlador óptimo con la supresión del error en estado estable de los integradores del control PI, se logró con esto realizar la tarea de seguimiento de trayectoria con rapidez y precisión, optimizando el uso de energía por parte de los actuadores.

4 Conclusiones

Este estudio ha explorado exhaustivamente el modelado eficiente del sistema no lineal de un dron hexacóptero, incorporando efectos giroscópicos y la fuerza de arrastre parasita mediante el método de Lagrange y herramientas de operaciones simbólicas. Además, se ha evaluado y comparado el desempeño de las estrategias de control PID, LQG y PI-LQG en términos de precisión, estabilidad y respuesta dinámica.

Durante las pruebas de seguimiento de trayectoria, se observó que el controlador LQG ofreció tiempos de asentamiento y sobreelongación menores en comparación con el PID, pero con errores en estado estable significativos en las coordenadas x e y . Estos errores son debido a las no linealidades del sistema y la falta de integradores para eliminarlos, limitan su

precisión en aplicaciones que requieren control de posición altamente preciso.

Por otro lado, el PI-LQG emergió como la estrategia más efectiva, mostrando tiempos de asentamiento y sobreelongación reducidos, sin errores en estado estable en ninguna de las coordenadas evaluadas. Esta mejora se logró gracias a la incorporación del componente integral que suprime los errores en estado estable y optimiza la respuesta dinámica del sistema frente a perturbaciones como las velocidades de viento simuladas

Los tres controladores demostraron una eficaz capacidad para filtrar el ruido de medida, destacándose el filtro de Kalman en la estrategia LQG y los componentes integral y derivativo en el PID. Esta robustez asegura una respuesta confiable del sistema incluso en presencia de perturbaciones externas.

Este estudio contribuye significativamente al campo del control de drones al proporcionar una evaluación comparativa detallada de estrategias de control convencionales y óptimas. La implementación exitosa del PI-LQG destaca su idoneidad para aplicaciones prácticas donde la precisión y la robustez son críticas al minimizar errores en estado estable y optimizar tiempos de respuesta lo cual es crucial para la implementación de sistemas de control de drones en entornos dinámicos y no estructurados, mejorando así la eficiencia operativa y la seguridad de vuelo.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión (VIE-4162 Semillero de Robótica, DICBoT), de la Universidad Industrial de Santander UIS, y el grupo de investigación DICBoT. Donde los proyectos de investigación aportan a la formación de los estudiantes de maestría y pregrado en ingeniería mecánica, en las áreas investigación de Dinámica, Control y Robótica.

Referencias

- [1] A. Rejeb, A. Abdollahi, K. Rejeb, y H. Treiblmaier, «Drones in agriculture: A review and bibliometric analysis», *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 198, p. 107017, jul. 2022, doi: 10.1016/j.compag.2022.107017.
- [2] A. Raghunatha, P. Thollander, y S. Barthel, «Addressing the emergence of drones – A policy development framework for regional drone transportation systems», *Transportation Research Interdisciplinary Perspectives*, vol. 18, p. 100795, mar. 2023, doi: 10.1016/j.trip.2023.100795.
- [3] B. Mishra, D. Garg, P. Narang, y V. Mishra, «Drone-surveillance for search and rescue in natural disaster», *Computer Communications*, vol. 156, pp. 1-10, abr. 2020, doi: 10.1016/j.comcom.2020.03.012.
- [4] M. Bangura y R. Mahony, «Nonlinear Dynamic Modeling for High Performance Control of a Quadrotor», presentado en IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2012.
- [5] T. Ma y S. Wong, «Trajectory tracking control for quadrotor UAV», en *2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, dic. 2017, pp. 1751-1756. doi: 10.1109/ROBIO.2017.8324671.
- [6] Mardlijah y Z. N. Alifah, «Control Design of Quadcopter using Linear Quadratic Gaussian (LQG)», en *2022 International Conference on Computer Engineering, Network, and Intelligent Multimedia (CENIM)*, nov. 2022, pp. 192-196. doi: 10.1109/CENIM56801.2022.10037533.
- [7] Y. AOKI, Y. ASANO, A. HONDA, N. MOTOOKA, K. HOSHINO, y T. OHTSUKA, «Nonlinear model predictive control for hexacopter with failed rotors based on quaternions —simulations and hardware experiments—», *Mechanical Engineering Journal*, vol. 8, n.º 5, pp. 21-00204-21-00204, 2021, doi: 10.1299/mej.21-00204.
- [8] N. P. Nguyen, N. Xuan Mung, y S. K. Hong, «Actuator Fault Detection and Fault-Tolerant Control for Hexacopter», *Sensors*, vol. 19, n.º 21, Art. n.º 21, ene. 2019, doi: 10.3390/s19214721.
- [9] J. Baldeón, J. Escorza, D. Chávez, y O. Camacho, «Control for Hexacopters: A Sliding Mode Control and PID Comparison», *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia*, vol. 39, n.º 3, pp. 137-144, dic. 2016.
- [10] K. V. Rao y A. T. Mathew, «Dynamic modeling and control of a hexacopter using PID and back stepping controllers», en *2018 International Conference on Power, Signals, Control and Computation (EPSCICON)*, ene. 2018, pp. 1-7. doi: 10.1109/EPSCICON.2018.8379607.
- [11] E. C. Suicmez y A. T. Kutay, «Attitude and altitude tracking of hexacopter via LQR with integral action», en *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, jun. 2017, pp. 150-159. doi: 10.1109/ICUAS.2017.7991327.
- [12] A. S. Ghersin, J. I. Giribet, J. Luiso, y A. Tournour, «Control robusto H-infinito para la velocidad de desplazamiento de un UAV en base a estimación de flujo óptico», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 18, n.º 3, Art. n.º 3, jul. 2021, doi: 10.4995/riai.2021.14370.
- [13] H. Schaub y J. L. Junkins, *Analytical mechanics of space systems*, 4.ª ed. en AIAA education series. Reston, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2018.
- [14] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, 5.ª ed. Madrid, España: Pearson Educación, 2010.