

Síntesis automática de plataformas paralelas flexibles utilizando Teoría de Helicoides

Alejandro G. Gallardo¹, Martín A. Pucheta^{1,2}

¹Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería, Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba, Córdoba, Argentina. Email: agallardo@frc.utn.edu.ar , mpucheta@frc.utn.edu.ar

²Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.

Resumen

Las plataformas paralelas flexibles (PPF) se emplean para el posicionamiento de alta precisión en variadas aplicaciones científicas, médicas e industriales. La Teoría de Helicoides permite sintetizar este tipo de plataformas en forma sistemática. En este trabajo se aborda el problema de ubicar automáticamente a las vigas de restricción para una plataforma paralela flexible cuando se parten de los movimientos tridimensionales deseados, conformando el espacio de libertad, y restricciones espaciales adicionales (plano de las fijaciones, volumen en que debe estar inscripto el mecanismo, etc). Se propone un algoritmo tal que dado un punto determina la dirección del helicoides de línea que sea recíproco al espacio de libertad deseado. Los puntos que se analizarán en el espacio resultante son los que pertenecen a la superficie del cuerpo rígido, construyendo un espacio de restricción conformado únicamente por helicoides de línea. La dimensión de este espacio indicará si el mecanismo puede implementarse físicamente con flexores de viga o no. Este algoritmo se aplica para la síntesis un mecanismo con un grado de libertad y otro de tres grados de libertad.

Palabras clave: plataforma paralela flexible; Teoría de Helicoides; geometría computacional de líneas.

Abstract

Parallel flexure stages (PFS) are used for high-precision positioning in several scientific, medical, and industrial applications. Screw Theory allows designers to synthesize this type of platform systematically. In this work, we address the problem of automatically locating the constraint beams for a flexible parallel platform starting from the desired three-dimensional movements, known as the freedom space, and additional spatial constraints (ground plane, volume in which the mechanism must be enclosed, and others). An algorithm is proposed such that, given a point, it determines the direction of the line screw that is reciprocal to the desired freedom space. The points to be analyzed in the resulting space are those that belong to the surface of the rigid body platform, constructing a constraint space formed only by line screws. The dimension of this space will indicate whether the mechanism can (or cannot) be physically implemented with beam flexures. This algorithm is employed to synthesis a mechanism with one degree of freedom and another of three degrees of freedom.

Keywords: parallel flexure stage; Screw Theory; computational line geometry

1. Introducción

Las plataformas paralelas flexibles (PPF) se emplean para el posicionamiento de alta precisión, desviación de luz láser, en robótica de nanomanipulación y en variadas aplicaciones científicas, médicas e industriales. El formalismo de la Teoría de Helicoides es el más adecuado, por su simplicidad y solidez matemática, para diseñar sistemáticamente PPFs planas y tridimensionales con pequeñas deflexiones, para evaluar sus modos y frecuencias de vibración [1], y para desacoplar sus actuaciones favoreciendo su controlabilidad y aumento de precisión [2].

Una de las etapas del diseño vacantes de ser automatizadas es la de convertir espacios de restricción en vigas. Esto puede asistirse con gráficas predefinidas en atlas de espacios de helicoides, como los propuestos por Hopkins [3] seguido de las Reglas de Blanding [4] o en forma analítica, como proponen Su y Tari [5]. Esta última metodología, de sólida base matemática, es difícil de implementar en forma automática.

En este trabajo se aborda el problema de ubicar automáticamente a las vigas de restricción para una plataforma paralela flexible cuando se parten de los movimientos tridimensionales deseados y restricciones espaciales. De no contar con asistencia computacional, el usuario debe proponer vigas manualmente siguiendo las conocidas Reglas de Blanding [4], que para la compleja geometría tridimensional y/o combinatoria de soluciones posibles se puede volver muy tedioso.

El trabajo es el primero que aborda cómo implementar vigas para un espacio de restricción dado, en forma automática. Este problema geométrico es muy interesante porque el diseñador podrá disponer automáticamente de una familia de líneas que satisfacen el espacio de restricción y enfocarse a tareas de elección de las más adecuadas ya sea mediante reglas empíricas o mediante técnicas de optimización computacional.

Como dato inicial, se parte de los movimientos tridimensionales deseados para el cuerpo rígido que se desea mover, expresados en términos de helicoides y con ello se obtiene el espacio de libertad T . Adicionalmente, se pueden contemplar restricciones espaciales de diseño, tales como la superficie de fijación de los extremos de las vigas de restricción. Las vigas se pueden representar como helicoides de línea. Un helicoides de línea queda definido por un punto que pertenece a la recta y por su vector dirección.

El problema de diseño de la PPF consiste en hallar los helicoides de línea que sean recíprocos al espacio T . Se propone un algoritmo tal que dado un punto determina la dirección del helicoides de línea que sea recíproco a T . Los puntos que se analizarán en el espacio resultante son los que pertenecen a la superficie inferior del cuerpo rígido, construyendo un

espacio de restricción conformado únicamente por helicoides de línea. La dimensión de este espacio indicará si el mecanismo puede implementarse físicamente con flexores de viga o no.

Este algoritmo se aplica para la síntesis un mecanismo con un grado de libertad y otro de tres grados de libertad.

2. Diseño basado en restricción

El diseño basado en restricciones se fundamenta en que el movimiento de un mecanismo queda definido por la localización y orientación de los elementos restrictivos que lo componen. Este método fue introducido por Maxwell y, posteriormente, definido para el diseño de máquinas de precisión por Blanding [3]. En los mecanismos tradicionales de precisión, el rango de movimiento es acotado, lo que permitió simplificar el análisis cinemático. Estas simplificaciones permitieron enunciar las reglas de Blanding, que describen el movimiento de los mecanismos y su relación con los elementos de restricción. Estas reglas también facilitaron el diseño de los mecanismos flexibles.

Blanding define una viga esbelta como una restricción ideal, la cual tiene una gran rigidez en dirección de su eje y una gran flexibilidad en la dirección perpendicular a su eje, este modelo es acertado para pequeños desplazamientos del extremo de la viga.

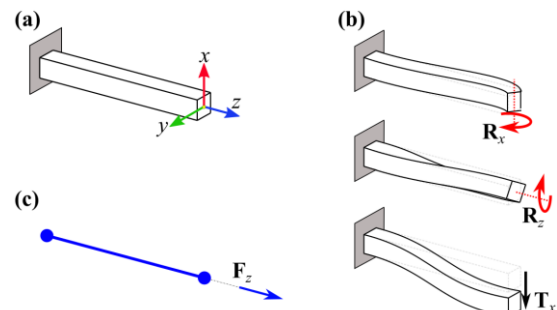


Figura 1. (a) Elemento flexible tipo viga, (b) y los 5 grados de libertad que permite. (c) Representación simplificada del flexor como restricción ideal.

En la figura (1a) se representa una viga esbelta, con un extremo empotrado y el otro libre. El eje de la viga es coincidente con el eje z del sistema de referencia. Por lo tanto, la viga restringe el desplazamiento a lo largo del eje z y permite las rotaciones R_x , R_y y R_z . Además, permite las traslaciones T_x y T_y , ver figura (1b). Todos estos movimientos generan desplazamientos infinitesimales perpendiculares a lo largo de la viga. La viga se representa de manera simplificada como un segmento de línea como se indica en la figura (1c) y se denomina línea de restricción.

Para simplificar, se analizarán los movimientos en el plano x - y del cuerpo S de la figura (2a). En este caso,

los movimientos posibles son las traslaciones T_x , T_y y la rotación R_z . Al cuerpo S se conecta la viga w_1 ,

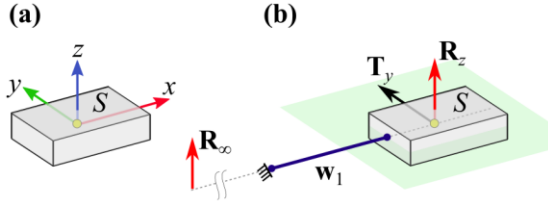


Figura 2. Helicoide definido por una línea (s ; s_0) y un paso h . Fuente: elaboración propia.

cuyo otro extremo se encuentra fijo a un cuerpo tomado como fijo. Como la viga posee gran rigidez a lo largo de la línea de restricción impide la traslación T_x del cuerpo S . Esta observación determina una de las reglas de Blanding:

- *Un punto de un cuerpo a lo largo de la línea de restricción sólo puede moverse perpendicularmente a la línea de restricción, y no a lo largo de ella.*

Como consecuencia, dos restricciones (vigas) ubicadas a lo largo de la misma línea de restricción son equivalentes, es decir, son redundantes. Esto es válido únicamente por hipótesis de pequeños desplazamientos.

Los movimientos permitidos del cuerpo S de la figura (2b) son una traslación T_y y una rotación R_z . Toda traslación puede ser representada por una rotación, cuyo eje se ubica en el infinito y con una orientación perpendicular al movimiento de la traslación. Por lo que R_∞ es equivalente a T_y .

Blanding estableció que cada grado de libertad de un cuerpo puede ser representado por una rotación y llamó a cada eje de rotación “Línea de libertad”.

La regla de los patrones complementarios de Blanding define la relación entre los grados de libertad y las restricciones:

- *Cada línea de libertad interseca a cada línea de restricción*

Esta regla también contempla el caso en el que el punto de intersección se encuentre en el infinito, es decir, que la línea de libertad sea paralela a la línea de restricción.

3. Teoría de Helicoides

Un helicoide, denotado por $\$$, es un vector de dimensión seis, compuesto por dos vectores de tres dimensiones $\$ = (s; s^0)$

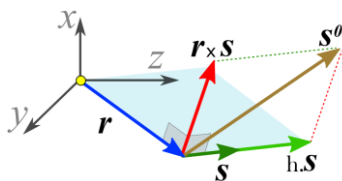


Figura 3. Helicoide definido por una línea (s ; s_0) y un paso h . Fuente: elaboración propia.

En la Figura (3) se encuentran representados dichos vectores, donde s es el vector dirección del eje del helicoide y s^0 es la suma de dos vectores:

(a) $s_0 = r \times s$ es el momento del vector s con respecto al marco de referencia $0 - xyz$.

(b) hs : es el producto del vector dirección con el escalar h , denominado paso del helicoide.

Entonces, un helicoide queda definido por tres entidades: (i) el vector dirección s , (ii) el vector posición r , y (iii) el escalar h denominado paso. Cuando el valor del paso es cero, el helicoide representa una línea recta en el espacio (s ; s_0) y esta manera de representar la recta en el espacio se define como coordenadas de Plücker.

4. Teoría de helicoides en el diseño basado en restricción

Un helicoide puede utilizarse para la representación del desplazamiento infinitesimal (en inglés, Twist) de un cuerpo, a través de la combinación de una traslación a lo largo de un eje y una rotación alrededor del mismo eje.

El helicoide de desplazamiento se define como:

$$t = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ r \times \Delta\theta + h \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde $\Delta\theta$ es el vector de desplazamientos rotacionales que apunta en la dirección del helicoide y δ es el desplazamiento lineal o traslacional, r es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoide y h es el paso del helicoide que determina la relación entre la rotación y el desplazamiento existente en el movimiento.

La fuerza y el momento, al igual que la rotación y traslación, pueden ser representados por un helicoide. El helicoide de fuerza/momento (en inglés, Wrench) se define como:

$$w = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ c \times f + q f \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde f es un vector de fuerza que apunta en la dirección del helicoide y τ representa el momento del helicoide alrededor del origen del sistema coordenado, c es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoide y q es el paso del helicoide que determina la relación entre la fuerza y el momento.

4.1. Producto recíproco

El trabajo de una fuerza w sobre un cuerpo con un movimiento t es definido por el producto recíproco del helicoide de fuerza y del helicoide de movimiento

$$w \circ t = f \cdot \delta + \tau \cdot \Delta\theta \quad (3)$$

Un helicoides de movimiento es recíproco a un helicoides de fuerza cuando su producto recíproco es cero. La ecuación (3) se puede escribir también como un producto de vectores y matrices

$$\mathbf{w} \circ \mathbf{t} = \mathbf{w}^T \mathbf{Q} \mathbf{t} \quad (4)$$

donde \mathbf{Q} es la matriz de intercambio

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ y $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ son, respectivamente, matrices 3×3 identidad y nula.

La primera regla de Blanding establece que el movimiento del cuerpo es perpendicular a la línea de restricción, es decir, el trabajo es nulo. Si el movimiento y la restricción se expresan en términos de helicoides, esto significa que deben ser recíprocos. Además, que los helicoides sean recíprocos conlleva que se intersectan, ya sea en un punto propio o impropio.

4.2. Espacio de libertad y espacio de restricción

Los movimientos que puede tener un cuerpo en el espacio son representados por helicoides de desplazamiento. El espacio de libertad está conformado por todos los helicoides de desplazamientos linealmente independientes y expresado de forma matricial como

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \dots \quad \mathbf{t}_N] \quad (5)$$

donde N determina la dimensión del espacio de libertad y los helicoides \mathbf{t}_i son los vectores bases del espacio de libertad, por lo tanto, cualquier movimiento permitido del cuerpo puede expresarse como combinación lineal de los \mathbf{t}_i .

El espacio de restricciones está formado por los helicoides de fuerza de restricción linealmente independientes que impiden ciertos movimientos del cuerpo y, al igual que el espacio de libertad, es expresado de forma matricial como

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{6-N}] \quad (5)$$

La dimensión del espacio de restricción está en función de la dimensión del espacio de libertad (o viceversa). Cualquier restricción que pueda expresarse como combinación lineal de los vectores \mathbf{w}_i es una restricción redundante.

La definición de un helicoides recíproco a otro puede ser extendida a sistemas de helicoides. Un sistema de helicoides \mathbf{T} es recíproco a otro sistema de helicoides \mathbf{W} si el producto recíproco de cada uno de sus helicoides es cero. Por ejemplo, se conoce el espacio de restricción \mathbf{W} del cuerpo S de la figura (4), que está conformado por tres helicoides de fuerza pura

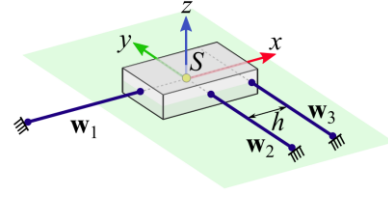


Figura 4. Helicoides definido por una línea (s ; s_0) y un paso h . Fuente: elaboración propia.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix} \quad (5)$$

aplicando la definición de producto recíproco de la ecuación (4) se obtiene que el espacio de libertad es el espacio nulo de $\mathbf{W}^T \mathbf{Q}$

$$\mathbf{T} = \text{null}(\mathbf{W}^T \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

La teoría de helicoides permite expresar los principios del diseño basado en restricción en términos matemáticos.

5. Síntesis de mecanismos paralelos

En la síntesis de mecanismos paralelos, se parte del espacio de libertad \mathbf{T} y de las dimensiones del cuerpo rígido del mecanismo que se desea mover. El objetivo es determinar la ubicación de los flexores tipo viga que permitan el espacio de libertad \mathbf{T} y se vinculen al cuerpo rígido.

Dado el espacio de libertad \mathbf{T} compuesto por m helicoides linealmente independientes

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \dots \quad \mathbf{t}_m]_{6 \times m} \quad (7)$$

se considera un helicoides de fuerza pura

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_F \\ \mathbf{r} \times \mathbf{w}_F \end{bmatrix} \quad (8)$$

este helicoides de línea representa el eje del elemento flexor tipo viga.

Para que \mathbf{w} pertenezca al espacio de restricción de \mathbf{T} , debe cumplir que el trabajo de las fuerzas de restricción sea nulo. En términos de helicoides, esto se expresa mediante la nulidad del producto recíproco

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Al desarrollar esta ecuación, se obtiene

$$\mathbf{T}_\omega^T (\mathbf{r} \times \mathbf{w}_F) + \mathbf{T}_\delta^T \mathbf{w}_F = \mathbf{0} \quad (10)$$

donde \mathbf{T}_ω^T es la matriz que contiene los vectores direcciones del espacio de libertad \mathbf{T} y \mathbf{T}_δ^T es la matriz que contiene los vectores traslación del espacio de libertad. El producto vectorial $(\mathbf{r} \times \mathbf{w}_F)$ se puede reemplazar por un producto matricial $(\tilde{\mathbf{r}} \mathbf{w}_F)$. La matriz antisimétrica $\tilde{\mathbf{r}}$ se define como

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

reemplazando $\tilde{\mathbf{r}}$ en la ecuación (10)

$$\mathbf{T}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{w}_F + \mathbf{T}_\delta^T \mathbf{w}_F = \mathbf{0} \quad (12)$$

y sacando factor común, se obtiene

$$(\mathbf{T}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{T}_\delta^T) \mathbf{w}_F = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\mathbf{L}_{(m \times 3)} \mathbf{w}_F = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{L}_{(m \times 3)}$ es la matriz cuyo espacio nulo es el espacio de los vectores dirección de \mathbf{w} que pasan por el punto \mathbf{r} .

El punto \mathbf{r} debe ubicarse dentro del espacio ocupado por el cuerpo rígido del mecanismo. Esto garantiza que el flexor tipo viga esté correctamente vinculado al cuerpo rígido.

Una vez definido el punto \mathbf{r} , se obtiene el vector dirección \mathbf{w}_F , y con ellos se construye el helicoides de línea \mathbf{w} .

El último paso para definir si el mecanismo puede ser construido con flexores tipo viga es encontrar un conjunto de helicoides de líneas cuya dimensión sea $6 - m$. Este paso puede resolverse analíticamente o numéricamente. A continuación, se resolverá para dos ejemplos.

5.1 Mecanismo de 1 grado de libertad

Cuando el espacio de libertad $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_\omega \\ \mathbf{t}_\delta \end{bmatrix}$ es de dimensión $m = 1$, la matriz \mathbf{L} adopta la siguiente forma

$$\mathbf{L}_{(1 \times 3)} = \mathbf{t}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}_\delta^T \quad (14)$$

Generalmente, la dimensión de \mathbf{L} será $n = 1$, y la dimensión de su espacio nulo será $3 - n$. Esto significa que por cualquier punto \mathbf{r} pasan 2 helicoides de línea linealmente independientes. Existe un caso particular cuando el grado de libertad es una rotación

$$\mathbf{t}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_\omega \\ \mathbf{p}_1 \times \mathbf{t}_\omega \end{bmatrix} \quad (15)$$

y se analiza la matriz \mathbf{L} en los puntos del eje de rotación. Reemplazando la ecuación (15) en la ecuación (14) y trabajando algebraicamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{(1 \times 3)} &= \mathbf{t}_\omega^T \tilde{\mathbf{p}} + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{t}_\omega)^T \\ &= (-\mathbf{p} \times \mathbf{t}_\omega)^T + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{t}_\omega)^T \\ &= ((-\mathbf{p} + \mathbf{p}_1) \times \mathbf{t}_\omega)^T \end{aligned} \quad (16)$$

donde \mathbf{p} y \mathbf{p}_1 son puntos arbitrarios sobre el eje de rotación, y su diferencia da un vector de igual dirección al eje de rotación, es decir, $-\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 = \mathbf{t}_\omega$. Por lo tanto, $\mathbf{L}_{(1 \times 3)} = \mathbf{0}$ será de dimensión $n = 0$. Esto significa que por cualquier punto \mathbf{r} ubicado sobre el eje de rotación pasan 3 helicoides de línea linealmente independientes.

En la figura (5a) se ilustra un cuerpo rígido S sobre el cual se desea obtener el espacio de libertad

$$\mathbf{t}_R = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

Para resolver la síntesis del mecanismo de manera numérica, se determina el espacio nulo de la matriz $\mathbf{L}_{(1 \times 3)}$ de la ecuación (14) para el conjunto de puntos de la figura (5b). Por simplicidad ilustrativa se han seleccionado puntos únicamente de las caras laterales e inferior del cuerpo S , y no de todas las caras. Los puntos se distribuyen en una grilla de

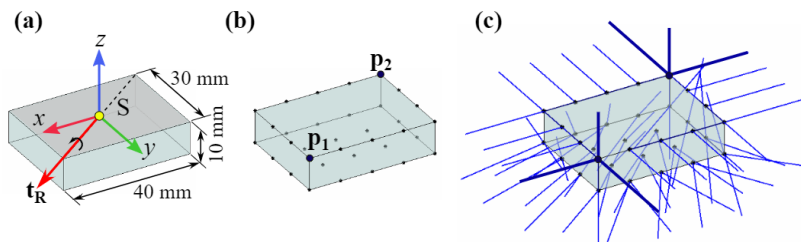


Figura 5. Diseño de un mecanismo paralelo: (a) dimensiones del cuerpo rígido sobre el cual se desea una rotación \mathbf{t}_R . (b) Puntos del cuerpo en los que se analizará si existen restricciones ideales. (c) Solución numérica para la síntesis del mecanismo. Fuente: elaboración propia.

10mm × 10mm. De todos los puntos, sólo \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 se ubican sobre el eje de rotación.

En la figura (5c) se muestra el conjunto de helicoides de línea que pertenecen al espacio de restricción de \mathbf{t}_R . Por cada punto pasan dos helicoides de línea, salvo en \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 , donde pasan tres. Este conjunto de helicoides de línea tiene dimensión 5, por lo tanto, el mecanismo puede ser construido con flexores tipo viga.

Este mismo problema puede resolverse analíticamente. La matriz \mathbf{L} de la ecuación (14) depende de tres variables $[r_x, r_y, r_z]$ y se determinará su espacio nulo utilizando cálculo simbólico de Matlab. Para ello, es necesario asumir dos estados por cada variable: nulo y no nulo. La combinación de estos estados da como resultado 8 posibles vectores de posición

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{r}_2 &= [r_x \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \ r_y \ 0]^T \\ \mathbf{r}_4 &= [0 \ 0 \ r_z]^T \\ \mathbf{r}_5 &= [0 \ r_y \ r_z]^T \\ \mathbf{r}_6 &= [r_x \ 0 \ r_z]^T \\ \mathbf{r}_7 &= [r_x \ r_y \ 0]^T \\ \mathbf{r}_8 &= [r_x \ r_y \ r_z]^T \end{aligned} \quad (18)$$

Por cada vector \mathbf{r}_i se obtendrán, al menos, dos vectores dirección. Resolviendo, se obtiene

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8/5 & 1 & 0 & -r_z & (8r_z)/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/5 & 1 & 0 & -r_z & (8r_z)/5 & -(8r_y)/5 \\ -(8r_y)/(5r_z) & 0 & 1 & r_y & -(8r_y)/5 & (8r_y^2)/(5r_z) \\ 8/5 & 1 & 0 & -r_z & (8r_z)/5 & r_x \\ r_x/r_z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r_x \\ 8/5 & 1 & 0 & -r_z & (8r_z)/5 & r_x - (8r_y)/5 \\ (5r_x - 8r_y)/(5r_z) & 0 & 1 & r_y & -(8r_y)/5 & -(r_y(5r_x - 8r_y))/(5r_z) \end{bmatrix}^T \quad \begin{matrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_5 \\ \mathbf{r}_6 \\ \mathbf{r}_7 \\ \mathbf{r}_8 \end{matrix} \quad (19)$$

\mathbf{W} es el conjunto de helicoides de línea que pertenecen al espacio de restricción de \mathbf{t}_R . A la derecha de cada helicoide de línea se indica el valor de r_i con el cual se calculó. La dimensión de \mathbf{W} es 5, lo cual indica que el mecanismo se puede implementar físicamente.

5.2 Mecanismo de 3 grados de libertad

Dado el espacio de libertad \mathbf{T} de dimensión 3

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\omega 1} & \mathbf{t}_{\omega 2} & \mathbf{t}_{\omega 3} \\ \mathbf{t}_{\delta 1} & \mathbf{t}_{\delta 2} & \mathbf{t}_{\delta 3} \end{bmatrix} \quad (20)$$

la matriz \mathbf{L} adopta la siguiente forma

$$\mathbf{L}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\omega 1}^T \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{t}_{\delta 1}^T \\ \mathbf{t}_{\omega 2}^T \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{t}_{\delta 2}^T \\ \mathbf{t}_{\omega 3}^T \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{t}_{\delta 3}^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

La dimensión de \mathbf{L} será de hasta $n = 3$ y la dimensión de su espacio nulo será $3 - n$.

A partir de los tres grados de libertad, el espacio fila de \mathbf{L} puede tener una dimensión igual o mayor que el espacio columna de \mathbf{L} , lo que implica que su espacio nulo estará conformado únicamente por el vector nulo. En otras palabras, existirán puntos en el espacio donde no habrá helicoides de línea que pertenezcan al espacio de restricción de \mathbf{T} .

Se analiza el caso, cuyo espacio de libertad es

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_{Hx} \ \mathbf{t}_{Hy} \ \mathbf{t}_{Hz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

donde \mathbf{t}_{Hi} son movimientos helicoidales en la dirección i . Estos movimientos son los que se desean obtener en la plataforma S , ver figura (6a).

En este caso la matriz \mathbf{L} adopta la siguiente forma

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -r_z & r_y \\ r_z & 1 & -r_x \\ -r_y & r_x & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde $[r_x, r_y, r_z]$ son las coordenadas de un punto genérico p .

Para la síntesis numérica, se traza una grilla de $0,1\text{mm} \times 0,1\text{mm}$ sobre las caras del cuerpo rígido y, en cada uno de los puntos, se determina el espacio nulo de la matriz \mathbf{L} de la ecuación (23). En la figura (6a) se muestra el conjunto de helicoides de línea que pertenecen al espacio de restricción. La dimensión de este conjunto de líneas es 3, por lo tanto, el mecanismo puede construirse.

En la síntesis analítica se debe analizar el determinante de la matriz \mathbf{L} . Para este ejemplo se analiza el determinante de la ecuación (23)

$$\det(\mathbf{L}) = r_x^2 + r_y^2 - r_z^2 - 1 \quad (24)$$

El $\det(\mathbf{L})$ debe ser cero, esto asegura que el espacio nulo de \mathbf{L} sea al menos de dimensión 1

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{L}) &= 0 \\ r_x^2 + r_y^2 - r_z^2 - 1 &= 0 \\ r_x^2 + r_y^2 - r_z^2 &= 1 \end{aligned} \quad (25)$$

Los puntos cuyas coordenadas cumplen la ecuación (25) se ubican sobre un hiperboloide de una hoja, ello se puede apreciar en el resultado de la síntesis numérica, figura (6b).

Una vez definido el espacio factible de solución, se deben determinar tres puntos por los cuales pasen tres helicoides de línea linealmente independientes. En este ejemplo, la solución es simple: se deben escoger

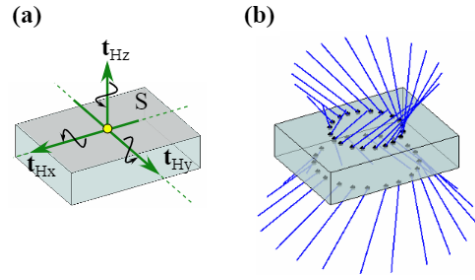


Figura 6. Diseño de un mecanismo paralelo: (a) Espacio de libertad, 3 movimientos helicoidales t_{Hi} cuyos ejes son ortogonales entre sí. (b) Solución numérica para la síntesis del mecanismo. Fuente: elaboración propia.

tres puntos coplanares que, a su vez, se ubiquen sobre el hiperboloide de una hoja. Si embargo, no todos los casos admiten un análisis simple y directo.

Por ello, una vez calculado el determinante de \mathbf{L} , debe ser evaluado para cada uno de los vectores de posición de la ecuación (18) e igualado a cero. La relación entre las coordenadas de los puntos que se obtengan será sustituida en la matriz \mathbf{L} y, posteriormente, se determinará su espacio nulo. En la ecuación (26) se presentan los helicoides de línea que se obtuvieron para este caso

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & \frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 & \frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & -\frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 \\ \frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & -\frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 & -\frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & \frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 \\ -\frac{1}{r_y} & \frac{r_y}{(r_y^2-1)^{1/2}} & 1 & \frac{1}{r_y} & -\frac{r_y}{(r_y^2-1)^{1/2}} & 1 \\ -\frac{1}{r_y} & -\frac{(r_y^2-1)^{1/2}}{r_y} & 1 & \frac{1}{r_y} & \frac{(r_y^2-1)^{1/2}}{r_y} & 1 \\ \frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & \frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 & -\frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & -\frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 \\ -\frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & -\frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 & \frac{r_z}{(r_z^2+1)^{1/2}} & \frac{1}{(r_z^2+1)^{1/2}} & 1 \\ \frac{(r_x^2-1)^{1/2}}{(r_x^2+1)^{1/2}} & \frac{1}{r_x} & 1 & -\frac{(r_x^2-1)^{1/2}}{(r_x^2+1)^{1/2}} & -\frac{1}{r_x} & 1 \\ -\frac{(r_x^2-1)^{1/2}}{(r_x^2+1)^{1/2}} & \frac{1}{r_x} & 1 & \frac{(r_x^2-1)^{1/2}}{(r_x^2+1)^{1/2}} & -\frac{1}{r_x} & 1 \\ -r_y & -(1-r_y^2)^{1/2} & 1 & r_y & (1-r_y^2)^{1/2} & 1 \\ -r_y & (1-r_y^2)^{1/2} & 1 & r_y & -(1-r_y^2)^{1/2} & 1 \\ (1-r_x^2)^{1/2} & r_x & 1 & -(1-r_x^2)^{1/2} & -r_x & 1 \\ -(1-r_x^2)^{1/2} & r_x & 1 & (1-r_x^2)^{1/2} & -r_x & 1 \\ \frac{r_y+r_z(-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & \frac{r_y r_z - (-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & 1 & \frac{r_y+r_z(-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & -\frac{r_y r_z - (-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & 1 \\ \frac{r_y-r_z(-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & \frac{r_y r_z + (-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & 1 & \frac{r_y-r_z(-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & -\frac{r_y r_z + (-r_y^2+r_z^2+1)^{1/2}}{r_z^2+1} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_5 \\ \mathbf{r}_6 \\ \mathbf{r}_7 \\ \mathbf{r}_8 \end{bmatrix} \quad (26)$$

6. Conclusiones

Partiendo del espacio de libertad deseado en un cuerpo, se determina el espacio de restricción conformado por flexores tipo viga. Esto se logró implementando las reglas de Blanding en términos de helicoides e interpretando los flexores de viga como líneas. El algoritmo propuesto puede ser resuelto de manera analítica (simbólica) y numérica.

Se implementó este nuevo algoritmo en la síntesis de un mecanismo con un grado de libertad de rotación y otro mecanismo con tres grados de libertad helicoidales. En la síntesis, se obtuvo el espacio factible de flexores de viga que permiten la construcción de los mecanismos.

Estos resultados son los primeros pasos claves para obtener un diseño automático de mecanismos flexibles paralelos. Por lo tanto, es factible que el algoritmo pueda ser incluido en interfaces gráficas de sistemas de ingeniería asistida por computadora.

7. Agradecimiento

Se agradece a la Universidad Tecnológica Nacional por el proyecto PID AMTCCO0008723TC y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

8. Referencias

- [1] Pucheta, M., Gallardo, A.G.: Modal Analysis of a 2R Flexible Platform Using Screw Theory. En: Vizán Idoipe, A., García Prada, J.C. (eds.) *Proceedings of the XV Ibero-American Congress of Mechanical Engineering CIBIM 22 / CIBEM 22, IACME: Ibero-American Congress of Mechanical Engineering*, pp. 50-56, Springer, Cham, 2023.
- [2] Gallardo, A.G., Pucheta, M.A.: Synthesis of parallel flexure stages with decoupled actuators using sum, intersection, and difference of screw systems, *Mechanism and Machine Theory* **192**, 105526, 2024.
- [3] Hopkins, J.: Design of Flexure-based Motion Stages for Mechatronic Systems via Freedom, Actuation and Constraints Topologies (FACT). PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, U.S.A., 2010.
- [4] Blanding, D.L.: *Exact constraint: Machine design using kinematic principles*. ASME Press, New York, 1999.
- [5] Su, H., Tari, H.: On line screw systems and their application to flexure synthesis. *Journal of Mechanisms and Robotics* **3**(1), 011009, 2011.