

Método intuitivo para el cálculo de entramados planos con reducción en la cantidad de incógnitas

Héctor Martín¹, Anna De Rosa², Sebastián Fantini³, Marcos Peresón⁴

¹Grupo de Diseño Mecánico GRUDIM, Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.
Email: hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar

²School of Engineerig, University of Basilicata, Potenza Italy. Email: dm868ing@unibas.it

³Grupo de Diseño Mecánico GRUDIM, Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.
Email: fantini_sebas@hotmail.com

⁴Grupo de Diseño Mecánico GRUDIM, Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.
Email: marcos.pereson.nahuel@gmail.com

Resumen

El trabajo consiste en la resolución de pórticos planos utilizando series de potencias enteras para el desarrollo de las funciones desplazamiento tanto transversal como axial de las barras. Luego de obtener estas funciones, manipulando un número muy bajo de incógnitas, se realizan los diagramas de esfuerzos de corte, normal y momentos de cada una de las barras. El método es intuitivo y logra resolver entramados hiperestáticos sujetos a diversas cargas puntuales en los nodos o distribuidas sobre las barras. El modelado es fácil de implementar para estudiantes con conocimientos de estática y series de potencias. La precisión de los resultados aumenta con el grado de potencia de las series seleccionadas. La novedad es que este incremento de términos en el desarrollo en serie no eleva la cantidad de incógnitas del problema planteado, situación que si se produce en otros métodos. Se aclara la metodología con ejemplos resueltos.

Palabras clave: Series de potencias, entramados planos, diagrama de esfuerzos

Abstract

The work involves solving planar frames using power series to develop the transverse and axial displacement functions of the bars. After obtaining these functions, by manipulating a very small number of unknowns, the shear force, normal force, and moment diagrams for each beam are constructed. The method is intuitive and can solve hyperstatic frames subjected to various point loads at the nodes or distributed loads on the bars. The modeling is easy to implement for students with knowledge of statics and power series. The accuracy of the results increases with the degree of the power series chosen. The novelty is that this increase in terms in the series expansion does not raise the number of unknowns in the problem, a situation that occurs in other methods. The methodology is clarified with solved examples.

Keywords: power series, planar frames, stress diagram

1. Introducción

En la resolución de los entramados, se aplica, lo que suele conocerse como condiciones de transferencia, es decir, la continuidad geométrica y el simultáneo equilibrio de los nudos, se consigue una particularidad

muy destacable que es la reducción del número de incógnitas a manejar [1-4]. En efecto, al aplicar las condiciones precitadas, se van resolviendo las distintas barras en un circuito seleccionado. Entonces se produce una economía de manipulación algebraica y correspondientemente una economía de tiempo

computacional. Utilizando esta técnica, se resuelven los entramados cuando los mismos se encuentran sometidos a esfuerzos aplicados o desplazamientos de vínculos. Estos esfuerzos pueden ser cargas verticales u horizontales en los nodos, momentos aplicados en los nodos, o bien cargas distribuidas transversales y/o axiales a lo largo de las barras. Estas cargas distribuidas pueden tener cualquier función en su variación (constante, polinómica, trigonométrica, etc...), ya que se hará un desarrollo en series de la carga aplicada. Como salida del programa elaborado, se muestran las funciones de los esfuerzos de corte, normales y momentos, además de los diagramas de cada uno de esos esfuerzos. El número total de incógnitas es muy bajo y, en general, depende de la cantidad de vínculos a tierra y del número de barras que llegan a cada uno de los nodos.

2. Metodología

Se analiza un pórtico en un sistema de coordenadas de referencia globales X-Y, con nb barras y mn nodos. El subíndice j denota la barra ($j= 1, 2, \dots, nb$). En cada barra hay un sistema de coordenadas locales x_j , en donde $0 \leq x_j \leq a_j$, como se muestra en la Figura 1.

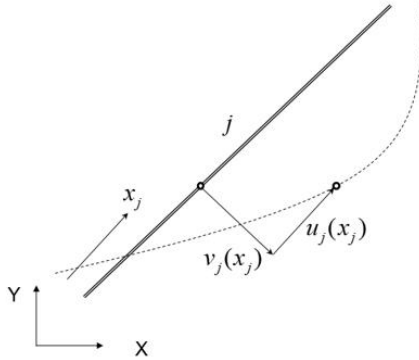


Figura 1. Coordenada local en una barra j y funciones desplazamientos axiales y transversales.

Las características geométricas son F_j , a_j y J_j (área, longitud y momento de inercia de la barra j), las mecánicas son E_j y ρ_j (módulo de Young y densidad de la barra j). En la Figura 2 se muestra un pórtico plano cerrado, ubicado en un sistema de coordenadas de referencia globales X-Y

En lo que respecta a las cargas distribuidas $p_j(x)$ axiales y $q_j(x)$ transversales que se encuentran en la barra j , las mismas deben estar expresadas en su desarrollo con series de potencias, como se indica en la (1a, b):

$$p_j(x_j) = \sum_{i=0}^{mp} p_{j,i} x_j^i \quad q_j(x_j) = \sum_{i=0}^{mq} q_{j,i} x_j^i \quad (1a,b)$$

Siendo mp y mq los máximos grados en los desarrollos en series de potencias de cada una de las cargas axiales y transversales respectivamente. Los valores de los coeficientes $p_{j,i}$ y $q_{j,i}$ son datos para

cada barra j que posea carga distribuida. Si la carga es una función trascendental, es posible hacer previamente el desarrollo en series de Taylor (o Mc Laurin como caso especial) de la expresión y expresarla como series de potencias. En el caso de existir cargas parciales en un tramo de una barra, es necesario colocar un nuevo nodo de modo de dividirla en barras para cada una de las cargas parciales, de forma que cada tramo tenga carga distribuida en toda su extensión. De la misma manera que si hay cargas concentradas en el medio de un tramo se debe crear un nodo donde se ubica el mismo. En la figura se muestra además, la carga vertical (V_5), horizontal (H_5) y el momento (μ_5) en el nodo 5.

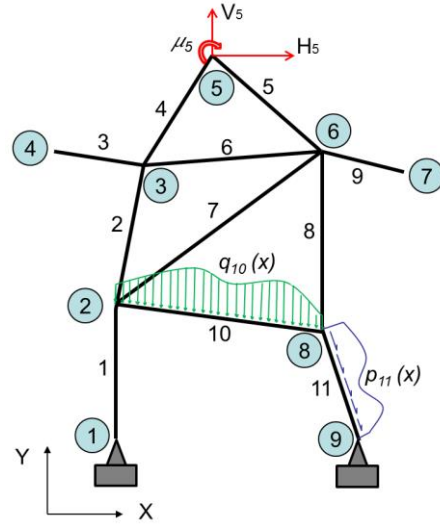


Figura 2. Esquema general de un entramado con cargas concentradas en el nodo 5, en las barras 10 y 11, distribuidas transversales $q_{10}(x)$ y axiales $p_{11}(x)$.

A los fines de simplificar los cálculos se utilizan coordenadas adimensionales:

$$0 \leq x_j \leq a_j \Rightarrow 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1 \Rightarrow \xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad (2)$$

Las ecuaciones gobernantes del problema estático, en coordenadas adimensionales son las siguientes:

$$E_j J_j v_j'''(\xi_j) - a_j^4 q_j(\xi_j) = 0 \quad (3a)$$

$$E_j F_j u_j''(\xi_j) + a_j^2 p_j(\xi_j) = 0 \quad (3b)$$

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales, un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, con las siguientes expresiones:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (4a,b)$$

En donde, por ejemplo, para la (4a), sus derivadas tienen el siguiente aspecto:

$$v_j'(\xi_j) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_{1,i} A_{j,i+1} \xi_j^i \quad (5a)$$

$$v_j''(\xi_j) = \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2} \xi_j^{2i} \quad (5b)$$

$$v_j'''(\xi_j) = \sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^{4i} \quad (5c)$$

En las cuales:

$$\varphi_{k,i} = \frac{(i+k)!}{k!} \quad (6)$$

Al reemplazar las derivadas correspondientes en las ecuaciones diferenciales adimensionalizadas (3a) y (3b) se llega a las ecuaciones de recurrencia:

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = -\frac{P_{j,i}}{F_{2,j} \varphi_{2,i}} \quad (7a,b)$$

En donde:

$$J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^4} \quad F_{2,j} = \frac{E_j F_j}{a_j^2} \quad (8a,b)$$

Como puede apreciarse en la expresión de recurrencia (7a), se vinculan los coeficientes $A_{j,i+4}$ con los coeficientes de las cargas $q_{j,i}$, y en la (7b), los $B_{j,i+2}$ con los $p_{j,i}$ lo que resulta en cada barra j un total de 6 incógnitas, a saber: $A_{j,0}$, $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, $A_{j,3}$, $B_{j,0}$ y $B_{j,1}$.

2.1. Condiciones de continuidad geométrica y estática en los nodos

En cada nodo donde concurren m barras, se deben plantear $m-1$ condiciones de continuidad geométricas cuyas expresiones son:

$$B_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} + S_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} \quad (9)$$

$$A_{k,0} = C_{j,k} \sum_{i=0}^m A_{j,i} - S_{j,k} \sum_{i=0}^m B_{j,i} \quad (10)$$

$$A_{k,1} = \frac{a_k}{a_j} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_{1,i} A_{j,i+1} \quad (11)$$

En donde C_{jk} y S_{jk} son respectivamente los cosenos y senos de los ángulos entre las barras j y k .

Con (9-11) se obtienen los coeficientes $A_{k,0}$, $A_{k,1}$ y $B_{k,0}$ de la barra k en función de la barra j .

En los nodos en los que concurre más de una barra, se deben plantear las correspondientes condiciones estáticas de equilibrio, o sea dos sumatorias de esfuerzos y una de momentos. Realizando proyecciones de esfuerzos sobre la barra k , se obtienen los coeficientes $A_{k,3}$, $A_{k,2}$ y $B_{k,1}$.

2.2. Condiciones de borde

En cada nodo en el cual se encuentra un vínculo se deben plantear las condiciones de borde correspondientes a cada tipo de vinculación. Las barras que concurren a un vínculo deben tener su sentido desde el vínculo hacia el otro extremo, por lo que deberán ser evaluadas en cero, o sea ($\xi_j = 0$).

Por ejemplo, las condiciones de borde correspondientes a una articulación en un origen de barra son:

$$u_k(0) = v_k(0) = M_k(0) = 0 \quad (12)$$

Con estas condiciones es posible determinar las constantes para la barra k que posea una articulación en su origen:

$$A_{k,0} = B_{k,0} = A_{k,2} = 0 \quad (13)$$

En forma similar se obtienen los coeficientes para las distintas condiciones de vinculación:

Articulación simple (o apoyo móvil):

$$u_k'(0) = v_k(0) = v_k''(0) = 0 \quad (14)$$

$$A_{k,0} = B_{k,1} = A_{k,2} = 0 \quad (15)$$

Empotramiento:

$$v_k(0) = u_k(0) = \theta_k(0) = 0 \quad (16)$$

$$A_{k,0} = B_{k,0} = A_{k,1} = 0 \quad (17)$$

Ménsula:

$$v_k''(0) = v_k'(0) = u_k'(0) = 0 \quad (18)$$

$$A_{k,3} = A_{k,2} = B_{k,1} = 0 \quad (19)$$

2.3. Programa de cálculo

Se ha elaborado un programa para los cálculos estáticos de un entramado. Se ha utilizado el software Mathematica [5]. En su comienzo, se cargan los datos del pórtico: coordenadas de nodos, matriz topológica de barras, ubicación de los vínculos a tierra en los nodos. Luego se indican los nodos que tienen cargas puntuales con sus valores y las barras con cargas transversales y axiales con sus funciones polinómicas correspondientes.

En la primera parte del programa, se determina el camino a seguir en el cálculo y se efectúa una nueva numeración de barras y nodos. Se debe agregar la localización de las cargas puntuales y reubicar las cargas distribuidas, transversales y axiales, en la nueva numeración de barras.

Se recorre el entramado analizando cuales son las incógnitas libres. Luego se realizan las recurrencias (7a,b) en cada barra y las condiciones de continuidad geométricas y estáticas. Finalmente se muestran los resultados en gráficos con las expresiones polinómicas de los esfuerzos, normal, corte y momento. También se muestran las deformadas de las barras.

3. Resultados

A continuación, se resuelve la estática de algunos entramados con diferentes características a modo de ejemplos numéricos a los fines de mostrar la eficacia del método planteado, se comparan los resultados con modelos resueltos con el método de elementos finitos [6] o con los que brinda la bibliografía [7].

3.1. Ejemplo 1

Se trata de un entramado presentado en el libro de Leontovich [7], en su Capítulo 2, enunciado como carga vertical aplicada a una ménsula, con las coordenadas de los nodos que se muestran en la Figura 3. Las unidades de medida en los ejes coordenados es metros, esto indica que, por ejemplo la barra 1 mide 3m, la barra 2 mide 1m, etc....

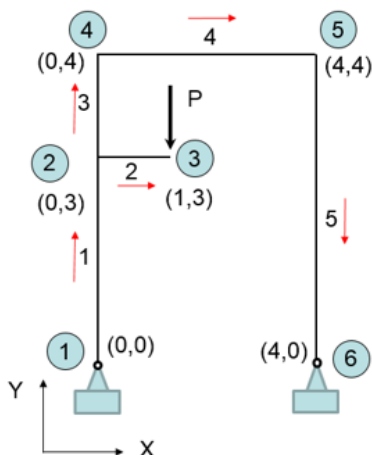


Figura 3. Esquema de datos de un entramado de 5 barras y 6 nodos, con articulaciones dobles en los nodos 1 y 6, con carga puntual en el nodo libre 3

Solamente en este ejemplo se agrega una flecha sobre el número de cada barra a los fines de indicar la dirección que se ha utilizado para cargar la barra. Esto indica que, la barra 1 tiene inicio en el nodo 1 y extremo final en el nodo 2, la barra 3 va del 2 al 4. Esto es importante al momento de interpretar los resultados, ya que las funciones correspondientes a cada sollicitación tendrán estas mismas direcciones. En este entramado, solo posee una carga puntual en una ménsula, $P = 1000 \text{ N}$. Los nodos 1 y 6 poseen vínculos a tierra del tipo articulaciones dobles. Para simplificar se adoptan todas las barras iguales, de sección uniforme $F = 0.12 \text{ m}^2$, con Módulo de Elasticidad $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y momento de inercia $J = 0,0036 \text{ m}^4$. Las longitudes de las barras se toman en metros, indicado en las coordenadas de los nodos en la Figura 3.

En la Figura 4, se muestran los gráficos de los esfuerzos de corte y normal obtenidos utilizando series de potencias con Mathematica [5]. Los valores son comparados con la bibliografía [7] en la Tabla 1. Se debe recalcar que, en las soluciones de la referencia citada [7], las mismas han sido halladas aplicando la teoría del trabajo virtual, en donde sólo se considera la energía de deformación por flexión, despreciándose los efectos de las deformaciones por esfuerzo de corte y axial. Esto último sí se ha tenido en cuenta en los presentes desarrollos utilizando las series de potencias. Este proceder acarrea una

pequeña diferencia en los resultados, lo que hace más exactos a los valores obtenidos con el método aquí propuesto.

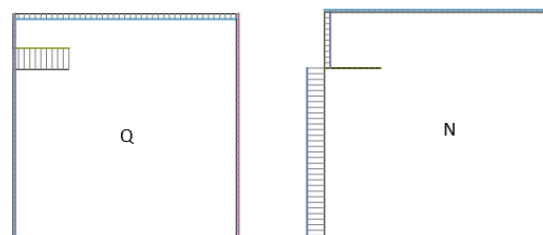


Figura 4. Gráficos de esfuerzo de corte (Q) y normal (N).

En los resultados de las tablas, en todos los casos, en los esfuerzos de corte y normal, las unidades se encuentran expresadas en [N] (Newtons) y los momentos en [Nm]. Los valores numéricos se redondearon a dos cifras decimales en todos los casos.

Tabla 1. Resultados de esfuerzo de corte y normal, en Newton [N], obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con los obtenidos en Leontovich [7].

Barra	Esfuerzo	Serie de potencias	Leontovich
1	Corte [N]	107,69	107,81
2		1000	1000
3		107,69	107,81
4		250	250
5		107,69	107,81
1	Normal [N]	750	750
2		0	0
3		250	250
4		107,69	107,81
5		250	250

Fuente: elaboración propia y comparación con la bibliografía [7].

En la Figura 5, se presenta el diagrama de momentos y el gráfico de deformaciones, ambos obtenidos mediante el desarrollo en series de potencias.

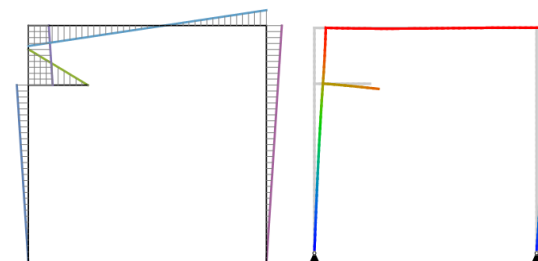


Figura 5. Gráficos de esfuerzo de momento y deformaciones.

A continuación, se dan las expresiones correspondientes a las funciones de momentos de cada una de las barras, obtenidos con desarrollo en series de potencias:

Barra 1: $M_1(x) = 107.69 x$
 Barra 2: $M_2(x) = 1000 - 1000 x$
 Barra 3: $M_3(x) = -676.93 + 107.69 x$
 Barra 4: $M_4(x) = -569.23 + 245 x$
 Barra 5: $M_5(x) = 430.76 - 107.69 x$

3.2. Ejemplo 2

Se presenta a continuación un entramado cerrado de mayor complejidad, [8] en el cual existen vinculaciones internas al pórtico. Básicamente es una estructura de geometría simétrica con 3 tensores (barras 9, 10 y 11) con una carga puntual P en el nodo 5 de 10.000 N, como se muestra en la Figura 6.

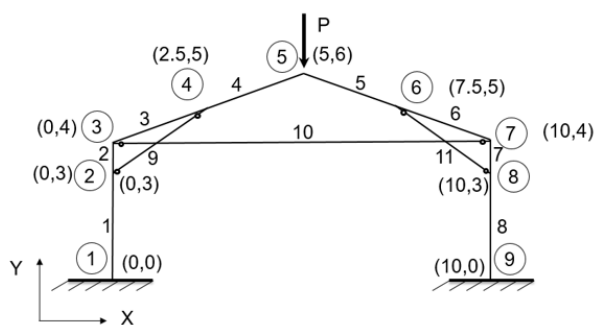


Figura 6. Entramado con 11 barras, doblemente empotrado en los nodos 1 y 9, con las barras 9, 10 y 11 articuladas internamente al pórtico.

Se han adoptado los mismos valores que en el ejemplo 1 para los materiales y geometría de las barras. Por simplicidad en el ingreso de datos, se toman todas las barras con las mismas características, pudiendo ser distintas en caso de ser necesario.

En la Figura 7, se muestran los diagramas de momentos obtenidos mediante el desarrollo en series de potencias, comparado con los que produce el programa de elementos finitos Algor [6].

Los valores de los momentos en algunos de los nodos se presentan en la Tabla 2, donde también se muestran valores de esfuerzos de corte y normales en las diferentes barras, que se observan esquemáticamente en la Figura 8.

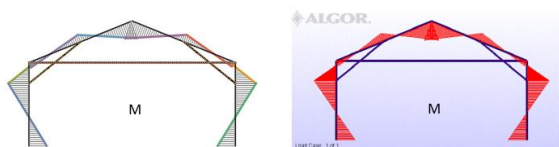


Figura 7. Gráficos de momentos, comparación con: a) los obtenidos utilizando el presente método y b) calculados con Método de Elementos Finitos, Algor [6].

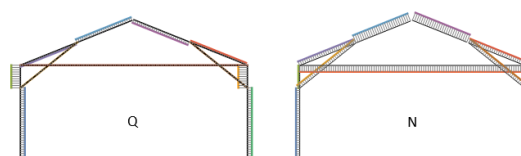


Figura 8. Gráficos obtenidos con series de potencias para los esfuerzos de a) corte y b) normal.

Es importante destacar que este ejemplo se resuelve con 15 incógnitas utilizando series. En caso de la verificación con MEF, con 10 elementos viga por barra, en cada nodo habrá 3 incógnitas, lo que resulta un total de 330 incógnitas.

En la Tabla 2 se muestran los valores de los esfuerzos y se los compara con los obtenidos utilizando el método de los elementos finitos.

Tabla 2. Valores de momento, en Newton metro [Nm] esfuerzo de corte y normal, en Newton[N], obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con los obtenidos con MEF, Algor [6].

Nodo	Esfuerzo	Series de potencias	MEF
1 y 9	Momento [Nm]	1876.68	1876.67
2 y 8		2183.83	2183.82
3 y 7		565.37	565.37
5		1957.62	1957.62
Barra	Esfuerzo	Series	MEF
9 y 11	Normal [N]	5254.02	5254.02
10		8399.02	8399.02
9, 10 y 11	Corte [N]	0	0
1 y 8		1353.5	1353.5
2 y 7		2749.2	2749.2

Fuente: elaboración propia y comparación con método de los elementos finitos (Algor).

Se presenta a continuación las expresiones de las funciones obtenidas para los momentos en [Nm] de algunas de las barras del entramado:

Barra 1: $M_1(x) = -1876.67 + 1353.5 x$
 Barra 2: $M_2(x) = 2183.82 - 2749.2 x$
 Barra 3: $M_3(x) = -565.37 + 503.32 x$
 Barra 4: $M_4(x) = 789.8 - 1020.4 x$
 Barra 5: $M_5(x) = 1557.62 - 1020.4 x$
 Barras 9, 10 y 11: $M_9(x) = M_{10}(x) = M_{11}(x) = 0$

3.3. Ejemplo 3

Con fines de mostrar otro tipo de carga, se resuelve el pórtico presentado en Leontovich [7]. Se trata de un pórtico de 4 barras con una carga triangular vertical en una de las barras, como lo muestra la Figura 9. La carga es perpendicular al suelo, por lo que es necesario descomponerla en una carga axial a la barra y otra transversal, esto es debido a que la barra 2 se

encuentra inclinada respecto a la dirección de la carga. Como se trata de una carga triangular, ambas se expresan como polinomios de primer grado con valor máximo en el nodo 2 y cero en el nodo 3.

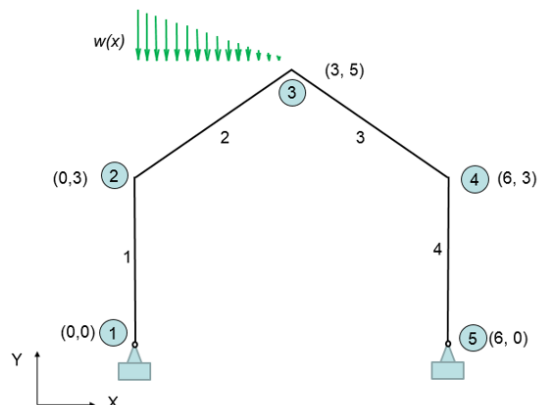


Figura 9. Pórtico abierto biarticulado en los nodos 1 y 6, con carga triangular distribuida en la barra 2.

En la Figura 10 a) se muestra el diagrama de momentos obtenido con el programa que utiliza series de potencias. Las expresiones de los momentos correspondientes a cada barra son las siguientes:

Barra 1: $M_1(x) = 125.15 x$

Barra 2: $M_2(x) = 375.44 - 970.64 x + 346.15 x^2 - 32 x^3$

Barra 3: $M_3(x) = -124.27 + 138.59 x$

Barra 4: $M_4(x) = 375.44 - 125.15 x$

Los resultados de los momentos en los nodos, obtenidos con las expresiones dadas en la bibliografía [7] son los siguientes:

Nodo 2 y 4: $M = 376.40$

Nodo 3: $M = 122.66$

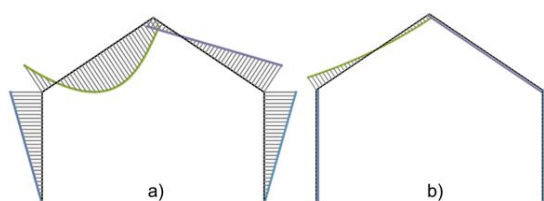


Figura 10. Diagramas de a) momento flector y b) esfuerzo de corte.

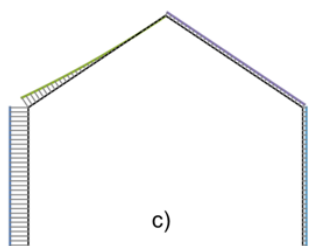


Figura 11. Diagramas de esfuerzo normal.

El diagrama de esfuerzos cortantes se muestra en la Figura 10 b). A continuación, las expresiones de las funciones correspondientes a cada barra obtenidas con el programa, en Newtons:

Barra 1: $Q_1(x) = 125.15$

Barra 2: $Q_2(x) = -970.64 + 692.31 x - 96 x^2$

Barra 3: $Q_3(x) = 138.59$

Barra 4: $Q_4(x) = -125.15$

La bibliografía [7] muestra expresiones que permiten calcular las reacciones horizontales H y verticales V en los apoyos:

$H_1 = H_5 = 125.468 \text{ N}$ $V_1 = 1250 \text{ N}$ $V_5 = 250 \text{ N}$.

El diagrama de esfuerzo normal se muestra en la Figura 11. A continuación las expresiones de las funciones correspondientes a cada barra, en [N]:

Barra 1: $N_1(x) = 1249.99$

Barra 2: $N_2(x) = 797.50 - 461.54 x + 64 x^2$

Barra 3: $N_3(x) = 242.80$

Barra 4: $N_4(x) = 249.99$

En la Tabla 3 se muestran algunos valores de esfuerzos obtenidos con series y comparados con los que provee la bibliografía [7].

Tabla 3. Valores de momentos [Nm] en los nodos, esfuerzos de corte y normal [N] en las barras, obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias.

Nodo	Esfuerzo	Serie de potencias	Leontovich [7]
2 y 4	Momento [Nm]	375.43	376.40
		124.26	122.66
Barra	Esfuerzo	Serie de potencias	Leontovich [7]
1	Normal [N]	1249.99	1250
		249.99	250
1 y 5	Corte [N]	125.14	125.46

Fuente: elaboración propia y comparación con la bibliografía [7].

3.4. Ejemplo 4

Se trata de un marco cerrado de 5 barras, con apoyos simples en los nodos 1 y 4. Posee una carga uniforme $q(x)$ en la barra inferior de 1000 N/m [8]. Las características geométricas de las barras son iguales a los ejercicios anteriores, o sea que se adoptan todas las barras de sección uniforme $F = 0.12 \text{ m}^2$ y momento de inercia $J = 0.0036 \text{ m}^4$. También se trata del mismo material, cuyo módulo de elasticidad es $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. El esquema del entramado se observa en la Figura 12, en donde se indican las

coordenadas de los nodos, en el sistema global y con unidades en metros.

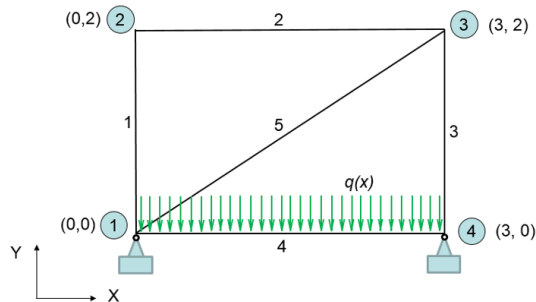


Figura 12. Marco cerrado biarticulado con carga uniformemente repartida $q(x)$ en la barra inferior (4).

Los resultados de los momentos en los nodos se muestran en la Tabla 4 comparándose con los obtenidos al utilizar el MEF.

Tabla 4. Valores de momentos (Nm) en los nodos y máximo momento en la barra 4, obtenidos al analizar el pórtico con series de potencias, comparados con MEF, Algor [6].

Nodo	Serie de potencias	MEF [6].
1 (barra 1)	364.17	364.16
1 (barra 4)	640.49	640.48
1 (barra 5)	276.32	276.32
2	66.82	66.82
3 (barra 3)	185.86	185.87
3 (barra 2)	10.31	10.31
3 (barra 5)	175.55	175.56
4	517.39	517.4
Max. Barra 4	546.06	546.06

Fuente: elaboración propia y comparación con método de los elementos finitos (Algor).

En la Figura 13 se comparan los gráficos de momento con los que se obtienen utilizando el método de los elementos finitos.

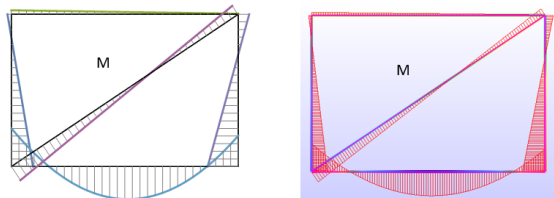


Figura 13. Diagramas de momentos obtenidos a) con el programa y b) con MEF [6].

En la Figura 14 se muestran los gráficos de esfuerzos de corte y normal obtenidos con el programa aquí presentado.

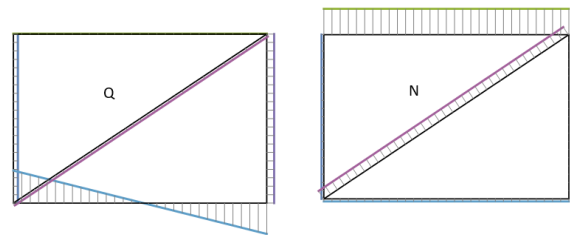


Figura 14. Diagramas de esfuerzo de corte y normal obtenidos con la metodología presentada.

Las expresiones de los momentos, en Newton metro [Nm] son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Barra 1: } M_1(x) &= -364.17 + 215.7 x \\
 \text{Barra 2: } M_2(x) &= 66.82 - 19.07 x \\
 \text{Barra 3: } M_3(x) &= 185.86 + 350.72 x \\
 \text{Barra 4: } M_4(x) &= 640.49 - 1541.35 x + 500 x^2 \\
 \text{Barra 5: } M_5(x) &= -276.32 + 125.18 x
 \end{aligned}$$

4. Conclusiones

En este trabajo, se propone una solución al cálculo de la estática de pórticos planos. Se utilizan desarrollos de series de potencias enteras para las funciones de los desplazamientos axiales y transversales de las barras. Se han resuelto varios pórticos en diferentes situaciones, tratando de utilizar ejercicios provistos en la literatura para comparar los resultados, en varios casos, o que se corroboraron los valores utilizando el método de elementos finitos. Es de destacar que, con el método aquí desarrollado, es posible también colocar en las barras, cargas de mayor complejidad, polinomios de mayor grado, o trigonométricas, ya que esta última se la expresaría en su desarrollo en series de potencias. Este tipo de carga podría resultar de mucha complejidad para el ingreso de datos en caso de utilizar algunos programas de elementos finitos, ya que es necesario dividir en muchos elementos la barra y cada elemento con una aproximación trapezoidal de carga, con fines de aproximar en toda la barra una carga trigonométrica, por ejemplo.

Algunos programas contemplan el ingreso de este tipo de cargas por barra y luego realizan la aproximación internamente. En la resolución con series, no sería una aproximación de la carga sino la función exacta de la forma en que varía la carga. Esta ventaja aquí descrita se suma a la reducción en la cantidad de incógnitas para resolver el entramado, respecto a otros métodos.

Como se ha dicho, una de las grandes ventajas del método es la reducción en la cantidad de incógnitas para resolver el problema, como se muestra en los ejercicios resueltos.

Es posible agregar también que la solución a la que se arriba es exacta, en la medida que es viable, teórica-

mente, tomar un desarrollo en series de potencias con grado infinito.

5. Referencias

[1] Filipich C. P., Escalante M. R., et al. *Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos*. ENIEF 2003. Mecánica Computacional. Bahía Blanca. Nov. (2003).

[2] Escalante M. R. *Series de potencias y descomposición ortogonal propia aplicados a la dinámica de cadenas y cables poco tensos*, Tesis doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2008.

[3] Bambill E. A., Filipich C. P. “*Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados uso sistemático de series de potencias*”. Mecánica Computacional Vol. XXIII G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.) Bariloche, Argentina, November 2004

[4] F.B. Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.

[5] Wolfram Mathematica © 1988-2024, Wolfram Research inc. Version n° 12.

[6] Algor FEMPRO, Copyright © 2009. Versión 23.1

[7] Valerian Leontovich, *Porticos y Arcos, soluciones condensadas para el análisis estructural*. Compañía editorial continental, S.A. México-España. Tercera Edición en español.

[8] Martín, H. D y Filipich C. P. *Estudio Dinámico de Entramados Planos utilizando Series de Potencias*. Primeras Jornadas del Programa Estructuras y Construcciones Civiles. Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, 19 de octubre de 2012. ISBN: 978-987-1896-07-3.