

Obtenção numérica dos fatores de intensidade de tensão quando da abertura e fechamento de uma trinca considerando a sua taxa de propagação

Carlos Alexandre J. Miranda¹, Luiz Carlos H. Ricardo², Rosani M. L. da Penha³

^{1,3}Centro de Engenharia Nuclear, IPEN, ¹cmiranda@ipen.br, ³rmpenha@ipen.br

²Centro de Ciências e Tecnologia dos Materiais, IPEN, lricardo@ipen.br

IPEN - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares

Av. Lineu Prestes 2242 - Cidade Universitária - São Paulo - SP, BRASIL

Resumo

Torna-se necessário um melhor entendimento da influência da sequência de carregamento no crescimento de trinca por fadiga ao se aplicar as ferramentas da mecânica da fratura a um carregamento cíclico complexo. O Retardo pode ocorrer sob certas condições e provocar resultados conservadores quando a vida à fadiga é dominada pelo crescimento, em especial após episódios de altas sobrecargas. Algumas das variáveis que influenciam este fenômeno são: carregamento, propriedades metalúrgicas, ambiente, etc., sendo difícil separar suas contribuições. Descrições do retardo baseadas em ajuste de dados tendem a esconder a realidade deste fenômeno. Neste trabalho faz-se uma breve revisão do problema descrito para entender o processo de propagação de trincas sob carregamento de amplitude variável. Também se discute como identificar a abertura e o fechamento da trinca, usando análise numérica com o Método dos Elementos Finitos, usando um carregamento padrão da indústria adaptado, considerando diferentes taxas de propagação de trinca.

Palavras-chave: fadiga; propagação de trinca; retardo; simulação; análise numérica.

Abstract

The fracture mechanic techniques applied to a complex fatigue load spectrum needs a clear understanding of the influence of loading sequences on fatigue crack growth. Retardation can take place under some conditions and tends to cause conservative results when the fatigue life is dominated by the crack growth, especially after high overload. Some variables influence this phenomenon, such as loading, metallurgical properties, environment, among others, and it is difficult to separate their contribution. Many reported descriptions of the retardation based on data fitting techniques tend to hide the real core of the phenomenon. The main scope of this work is to present a short review of the described problem to understand the crack propagation processes under variable amplitude loading. It is also discussed how to identify the crack opening and closure using the finite element method under the effect of different crack propagation rates considering a standard spectrum loading from the industry with a numerical example.

Keywords: fatigue; crack propagation; retardation; simulation; numerical analysis.

1. Introdução

Mesmo com seus conhecidos desvios, imprecisões e conservadorismo comprovado, a regra de Miner [1] é utilizada no projeto de muitas estruturas avançadas. Para problemas de crescimento de trincas sob carregamentos de espectro cíclicos e complexos, a simples adição do crescimento de trincas que ocorre em cada porção da sequência de carregamento (ou de

cada ciclo) produz resultados que podem ser tão errôneos quanto os resultados obtidos usando a regra de Miner ou até piores. O retardo tende a causar resultados conservadores usando a regra de Miner quando a vida em fadiga é dominada pelo crescimento da trinca, especialmente após sobrecarga elevada. O efeito oposto geralmente ocorre quando a vida é dominada pelo início e crescimento de pequenas fissuras.

As equações da da/dN x ΔK derivadas experimentalmente são independentes da sequência de carregamento. A utilização de técnicas mecânicas de fratura aplicadas a um espectro complexo de cargas de fadiga requer uma compreensão clara da influência das sequências de carregamento no crescimento de trincas por fadiga. A maioria das descrições teóricas relatadas do retardo é baseada em técnicas de ajuste de dados, que tendem a esconder o verdadeiro cerne do fenômeno. Que é muito complicado e afetado por variáveis como carregamento, propriedades metalúrgicas, ambiente, entre outras. E é difícil separar a suas contribuições.

O objetivo deste trabalho é (a) apresentar uma breve revisão do problema descrito para entender os processos de propagação de trincas sob carregamento de amplitude variável e (b) mostrar como é possível identificar a abertura e o fechamento de trincas utilizando o método dos elementos finitos, sob o efeito de diferentes taxas de propagação de trincas. Para tanto é considerado um carregamento de espectro de suspensão padrão da indústria automobilística. Para minimizar os problemas de convergência que surgem neste tipo de análise, a propagação da fissura baseou-se na liberação de nós nas cargas mínimas.

2. Propagação de Trincas - Conceitos Básicos

Paris & Erdogan [2] realizaram uma revisão sobre a abordagem de propagação de fissuras de Head [3] e outros pesquisadores e discutiram a semelhança dessas teorias e as diferenças de resultados entre elas, isoladas e em testes de grupo. Paris sugeriu que, para uma variação cíclica de carga, o campo de tensões na ponta da trinca para um ciclo pode ser caracterizado pela variação do fator de intensidade de tensão ΔK , Eq. (1) onde K_{\max} e K_{\min} são, respectivamente, os fatores de intensidade de tensão máximo e mínimo.

A curva de propagação de trinca apresenta um valor limiar, ΔK_{th} , abaixo da qual não há crescimento de trinca. A curva dos valores de ΔK vs da/dN em escala logarítmica, mostra três partes típicas: (A) a região próxima do limiar, onde a taxa de crescimento de fissura é elevada, (B) uma parte linear (sua região central) que representa a lei Paris-Erdogan, Eq. (2); e (C) uma região de alta taxa de crescimento próxima à instabilidade.

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} \quad (1)$$

$$da/dN = C(\Delta K)^m \quad (2)$$

Nesta equação os principais parâmetros são C, ΔK e m, sendo C e m obtidos por ajuste de dados experimentais. Entre outras limitações, esta equação é

válida apenas na região (B). Portanto, não cobre a região próxima do limiar (A) nem a região próxima da instabilidade (C).

Alguns pesquisadores propuseram equações semelhantes que cobrem um ou ambos os extremos da curva ΔK vs da/dN . Muitos deles discutem modelos de crescimento de trincas para carregamento de amplitude variável e os mecanismos e contribuições para o retardo devido à sobrecarga. Dentre estes, e trabalhando com o Conceito de Fechamento de Trincas, podem ser citados Elber [4], Bell e Creager [5] - com um modelo aplicado ao Fechamento Generalizado, Newman [6] - com aplicação no Método dos Elementos Finitos, e Dill e Staff [7] - com aplicação/ consideração da Tensão de Contato.

O início e o crescimento da trinca por fadiga sob condições de carregamento cíclico são controlados pelas zonas plásticas que resultam das tensões aplicadas e existem na vizinhança (à frente) de uma trinca em propagação e em seu rastro ou nos flancos das superfícies adjacentes. Por exemplo, as características de fadiga de uma amostra ou componente fissurado sob uma única sobrecarga ou situações de carregamento de amplitude variável são significativamente influenciadas por estas zonas plásticas.

Na modelagem da taxa de crescimento de trincas por fadiga, da/dN , isso é levado em conta pela incorporação de danos acumulativos, ciclo após ciclo, e deve incluir efeitos de plasticidade. Durante a propagação da fissura a zona plástica deverá crescer e a esteira plástica terá zonas plásticas compressivas que podem ajudar a manter a fissura fechada. Hairman & Provan [8] discutem os problemas relacionados ao carregamento de fadiga em estruturas sob sobrecarga única e carregamento de amplitude variável envolvendo a estimativa de zonas afetadas pela plasticidade à frente da ponta da trinca.

3. Plasticidade na ponta da trinca

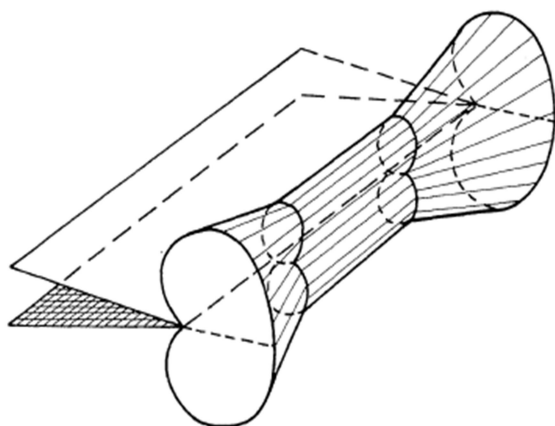
A análise de tensão elástica linear de trincas agudas prevê tensões infinitas na ponta da trinca. No entanto, a plasticidade na ponta da trinca leva a um relaxamento das tensões na ponta da trinca. Assim, forma-se uma zona plástica (onde existem os defeitos microestruturais, como deslocamentos e vazios). Basicamente, e de forma simplificada, considera-se que as tensões locais são limitadas à resistência ao escoamento do material. O tamanho da zona plástica da ponta da trinca pode ser estimado, normalmente sob condições planas (tensões planas ou deformações planas).

À medida que a região inelástica na ponta da trinca se

torna maior, a mecânica da fratura linear elástica (MFLE) não é mais útil para prever as equações do campo de tensão. Com plasticidade moderada, entretanto, é possível contabilizar seus efeitos adjacentes à ponta da trinca calculando um fator de intensidade de tensão efetiva (K_{eff}) com a adoção do tamanho da zona plástica (r) como parâmetro de correção do comprimento da trinca, a . Isto é, adotando, como tamanho da trinca o valor $(a+r)$.

Uma pequena zona plástica, $r \ll a$, sendo a o comprimento da trinca, é referida como escoamento em pequena escala. Um escoamento em grande escala corresponde a uma grande zona plástica, que ocorre normalmente em materiais muito dúcteis nos quais $r \gg a$. Como consequência da deformação plástica à frente da ponta da trinca, a MFEL é limitada a $r \ll a$. Já, no caso contrário, quando o tamanho da zona plástica é grande ($r \geq a$) a teoria da mecânica da fratura elástico-plástica (MFEP) é que controla o processo de fratura. Portanto, deve ser determinado um limite aproximado para a validade das teorias LEFM e EPFM.

A Figura 1 mostra (esquemáticamente) zonas plásticas para condições de tensão plana (que ocorre, por ex., em uma placa fina) e deformação plana (que predomina em uma placa espessa). De qualquer forma, mesmo que no interior de uma placa exista uma condição de deformação plana, sempre haverá um estado de tensão plana na sua superfície. As tensões perpendiculares à superfície externa são inexistentes e, portanto, $\sigma_z = \sigma_3 = 0$ na superfície. Se a deformação plana prevalecer no interior da placa, a tensão σ_3 aumenta gradualmente de zero (na superfície) até o valor da deformação plana no interior/centro [9].



Fonte: Adaptada de [9]

Figura 1. Aspecto/ forma da zona plástica ao longo da espessura (eixo z).

Consequentemente, a zona plástica diminui gradualmente do tamanho correspondente à tensão

plana na superfície, para o tamanho associado à deformação plana no interior da placa.

Dugdale [10] propôs o chamado modelo de escoamento de faixas ou, no 'jargão' da área: *strip yield model*, para a zona plástica sob condições de tensão plana. Este modelo, agora clássico, supõe as zonas plásticas na forma de faixas estreitas, estendendo-se por uma distância r de cada ponta de uma fissura central, e sob a tensão de escoamento σ_{ys} . No caso de tensões cíclicas, e à medida que a trinca cresce, atrás da nova frente de trinca existe uma região com tensões de compressão (residuais). Estas tensões internas (compressivas) provocam o chamado fenômeno de fechamento de trinca, pois tendem a fechar a trinca na região onde $a < x < c$, sendo $2c$ o comprimento efetivo da trinca ($2c = 2a + 2r$).

3.1. O Fenômeno do Retardo

Observou-se que, sob certas condições, o crescimento da trinca apresenta uma taxa menor, o retardo, devido a vários fatores. Hoje em dia ainda existem muitos aspectos dos fenômenos de interação de cargas que carecem de explicações adequadas. Corbly & Packman [11] apresentaram um estudo sobre diversos aspectos do retardo. Dentre estes podem ser apontados:

- (a) O retardo aumenta com maiores valores de carga de pico σ_{pico} para valores constantes de níveis de tensão mais baixos;
- (b) Se a razão entre o pico de tensão e os fatores de intensidade de tensão mais baixos for maior que 1,5, é observado retardo na faixa de intensidade de tensão mais baixa. Os testes não foram continuados por tempo suficiente para verificar se a trinca se propagou novamente [12];
- (c) Cargas de pico negativas (compressão) não causam influência substancial nas taxas de crescimento de trincas em níveis de tensão mais baixos se os valores de $R > 0$ para a tensão mais baixa [13].

3.2. Modelo de escoamento em pequena escala

O modelo de Dugdale [10] da plasticidade da ponta da trinca, basicamente um modelo de 'estado estacionário', chamado modelo de escoamento em pequena escala, foi modificada [28] para ser aplicado ao carregamento geral de amplitude variável. Ele considera uma faixa de material plastificado nas superfícies da trinca por fadiga. O crescimento da trinca por fadiga é simulado eliminando o material/elemento da tira ao longo de uma distância correspondente ao incremento do crescimento da trinca por fadiga, conforme mostrado na Figura 2.

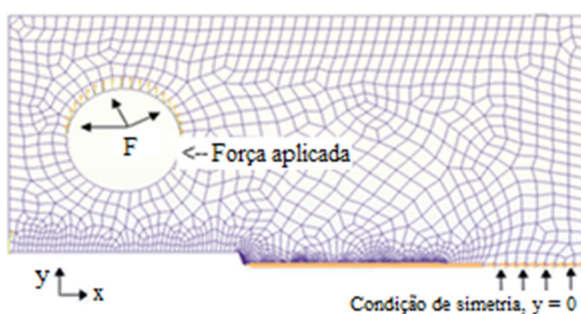
Para satisfazer a compatibilidade entre a parte elástica

ao redor de uma trinca. A seguir, um modelo EF usado em algumas simulações numéricas será descrito juntamente com alguns resultados típicos.

4. Modelo de elementos finitos e resultados

Para analisar numericamente o fechamento de trinca induzido pela plasticidade (PICC, do inglês “*plastic induced crack closing*”) usando um modelo de elementos finitos deve-se discretizar e modelar a geometria fissurada, com um material com comportamento elástico-plástico, aplicar uma carga cíclica estendendo a trinca e medindo o nível de fechamento da mesma. Com este objetivo, Ricardo [16] modelou um corpo de prova compacto (CT) usando o código de elementos finitos MSC/Patran [17] e o ABAQUS [18] como ‘*solver*’. O modelo, sua hipótese principal e os resultados somados serão apresentados a seguir, de forma abreviada, juntamente com alguma discussão sobre questões relacionadas.

Apenas metade da geometria foi modelada devido à simetria da própria geometria e do carregamento considerado. Foi, também, definida a condição de tensão plana para simular os efeitos de escoamento em pequena escala em modelos bidimensionais (2D), produzindo crescimento de trincas por fadiga sob carregamento de espectro variável. A Figura 3 mostra o modelo de Elem finitos com as condições de contorno aplicadas. O modelo possui elementos triangulares e quadriláterais com interpolação quadrática e elementos de mola atuando na direção y (utilizados para liberação de nós na superfície da trinca). As dimensões totais são: espessura $B=3,8$ mm, largura $W=50,0$ mm e $a/W=0,26$.



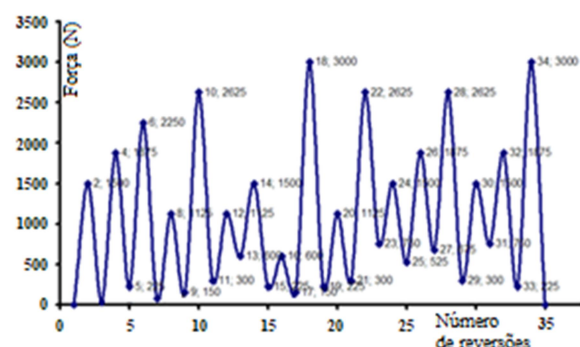
(Fonte: os autores.)

Figura 3. Modelo de elementos finitos adotado (Malha, Carregamento e Condições de contorno aplicadas)

O comitê FD&E (*Fatigue Design & Evaluation*), da SAE (*Society of Automotive Engineers*) possui arquivos de espectro de fadiga de carga padrão. O carregamento utilizado mostrado na Figura 4 foi adaptado de um dos histogramas FD&E/SAE considerando apenas as cargas de tração.

A carga máxima utilizada foi escalada para produzir um $K_{max} \approx 0,6 K_{IC}$, utilizando a expressão de K para a geometria CT, onde K_{IC} é o fator crítico de intensidade de tensão do material adotado no presente estudo, um aço de baixa liga, cujas principais propriedades são apresentadas na Tabela 1 onde σ_{YS} é o limite de escoamento; σ_{UTS} é a resistência máxima à tração; E é o módulo de Young; E_T é o módulo tangencial; e ν é o coeficiente de Poisson.

O tamanho estimado da zona plástica foi de 0,48mm e, portanto, o menor elemento da malha à frente da trinca deveria ser da ordem de 0,048mm, porém foi utilizado 0,025mm (cerca de metade do valor estimado).



(Fonte: os autores.)

Figura 4. Espectro de cargas aplicado.

Tabela 1. Propriedades do material.

σ_{YS} (MPa)	σ_{UTS} (MPa)	E (MPa)	E_T (MPa)	ν
230	410	210000	21000	0,30

(Fonte: os autores.)

4.1. Simulação da propagação da trinca

A malha deve ser altamente refinada próximo à frente da trinca, com escala micrométrica, para modelar as zonas plásticas da ponta da trinca direta e invertida [19]. A zona plástica ‘direta’ é composta pelo material próximo à ponta da trinca que sofre deformação plástica na carga máxima, portanto está intimamente relacionada ao K_{max} . A zona plástica ‘invertida’ abrange o material próximo à ponta da trinca que sofre escoamento por compressão na carga mínima e está relacionada ao ΔK [19].

Programas comerciais de Elementos Finitos oferecem ferramentas para lidar com deformação elástico-plástica, propagação de trincas e contato entre os flancos de trincas e, portanto, são adequados para modelar o fechamento de trinca induzido pela plasticidade (PICC). No entanto, os modelos

numéricos apresentam simplificações significativas em relação à propagação real de trincas por fadiga como, por exemplo:

- as taxas de crescimento de trincas por fadiga podem ser significativamente maiores que os valores reais próximos aos elementos da ponta da trinca; e
- a propagação de trincas é associada a uma carga constante quando na realidade ocorre continuamente durante todo o ciclo de carga.

Em simulações numéricas, a trinca pode ser incrementada na carga máxima [20], na carga mínima [21, 22] ou em outras posições do ciclo de carga. Ogura et al. [22], por exemplo, avançaram a trinca quando a força de reação da ponta da trinca atingiu zero durante o ciclo de carga. No entanto, nenhuma destas abordagens representa verdadeiramente o processo de fadiga, uma vez que a extensão da fissura é, como mencionado acima, um processo contínuo que ocorre durante todo o ciclo de carga.

A proposta de incremento na carga mínima foi pensada para superar as dificuldades de convergência causadas pela propagação da fissura na carga máxima. Isto não é realista, uma vez que não se espera que a fissura se propague num campo de tensões compressivas. No entanto, foi observado que a carga na qual ocorre o incremento da fissura não influencia significativamente os resultados numéricos do fechamento da trinca [23, 24]. Sob carga de amplitude constante, a carga de abertura da ponta da trinca normalmente aumentará monotonicamente, com o aumento do crescimento da trinca, até que um valor estabilizado seja alcançado.

Assim, com base nessas considerações, neste trabalho os nós foram liberados na ponta da trinca durante a carga mínima de um ciclo para simular o crescimento da trinca e serão considerados o primeiro contato do nó atrás da ponta da trinca, tensão positiva ($+S_{yy}$) para caracterizar a abertura da fissura e tensão negativa ($-S_{yy}$) para caracterizar o fechamento da fissura. Além disso, quatro taxas de propagação de trincas (CRP, *crack propagation rates*), em mm/ciclo, foram utilizadas no trabalho [16], conforme Tabela 2.

Tabela 2. Taxas de propagação da trinca (CRP).

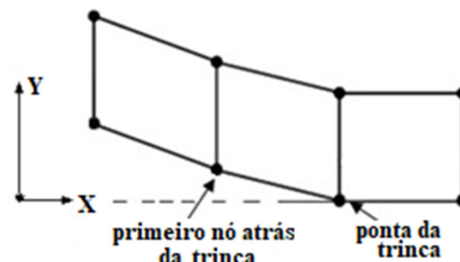
modelo #	CRP	Nome do modelo
1	0.25	SAE0.25
2	0.50	SAE0.5
3	0.75	SAE0.75
4	1.00	SAE1.0

(Fonte: os autores.)

4.4.1. Liberação de nós - prática

Normalmente é suficiente aumentar a fissura à frente da zona plástica resultante do primeiro ciclo de carga [26]. O nível de tensão na ponta da trinca deve ser positivo para caracterizar a abertura da trinca e negativo para caracterizar o fechamento da trinca.

Antunes & Rodrigues [19] consideram como critério básico para determinar a abertura ou fechamento da fissura o primeiro contato do flanco da fissura, que corresponde ao contato do primeiro nó atrás da atual ponta da fissura, conforme esquematizado na Fig. 5. Esta é a definição originalmente proposta por Elber [4] e tem sido utilizada por outros autores como Jiang et al. [25].



(Fonte: os autores.)

Figura 5. Critério de abertura e fechamento da trinca.

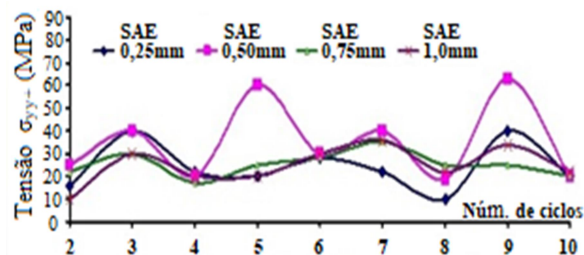
4.2. Resultados

Os resultados típicos para este tipo de análise são a Tensão de abertura de trinca (σ_{yy+}) e a Tensão de fechamento de trinca (σ_{yy-}), versus o número de ciclos, mostrado nas Figuras 6 e 7, respectivamente, para as taxas de propagação da trinca consideradas. Outros resultados típicos (não mostrados) para este tipo de análise são os campos de tensão na região próxima e ao redor da ponta da trinca, onde a trinca abre e fecha.

4.3. Discussão

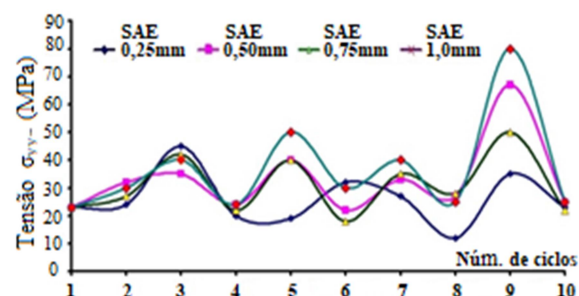
Primeiramente, conforme apontado por Ricardo [16], é difícil determinar com precisão a abertura ou fechamento da fissura. É necessário utilizar um processo iterativo durante a carga e descarga para encontrar a abertura ou fechamento da trinca. O efeito de retardo está presente em alguns ciclos em casos especiais onde há sobrecargas.

A Figura 6 mostra o efeito de diferentes taxas de propagação de trincas na tensão de abertura. Este gráfico inicia no segundo ciclo porque não foi possível identificar em todos os modelos quando a trinca se abre, pois todas as tensões no primeiro ciclo foram positivas. No início não há diferença representativa nos quatro primeiros ciclos em todos os modelos de propagação de fissuras.



(Fonte: os autores.)

Figura 6. Tensão de abertura da trinca (σ_{yy+}), MPa.



(Fonte: os autores.)

Figura 7. Tensão de fechamento da trinca (σ_{yy-}), MPa.

Do quarto ao quinto ciclo é possível identificar uma diferença no nível de tensão de abertura de fissura do modelo SAE2 (propagação de fissura 0,5 mm/ciclo) e dos demais modelos. A diferença pode estar relacionada com a sobrecarga que o corpo de prova apresentou no quinto ciclo fazendo com que o aumento do nível de tensão de abertura de fissura fosse mais representativo do que em outros que sofreram a mesma sobrecarga.

Do sexto ao oitavo ciclos é possível identificar novamente pouca diferença na tensão de abertura de trinca dos modelos. Pela Figura 7 é possível observar que nos primeiros quatro ciclos não há diferenças significativas nas tensões de fechamento de fissura nos modelos estudados. Nos demais ciclos o modelo SAE1 (propagação de trinca 0,25 mm/ciclo), não apresenta diferença significativa de tensão de fechamento de trinca durante a propagação da trinca. Na verdade é o modelo mais conservador dos quatro avaliados.

Mais detalhes sobre os resultados obtidos e sua discussão podem ser encontrados em Ricardo [16] ou em Ricardo & Miranda (27) do qual este texto é uma versão reduzida.

5. Conclusão

O uso de ferramentas da mecânica para avaliar a propagação de trincas sob carregamento de amplitude

variável requer uma compreensão clara da influência da sequência de carregamento no crescimento de trincas por fadiga. De acordo com os objetivos mencionados na Seção 1 (Introdução), inicialmente foi feita uma breve revisão dos processos de propagação de trincas sob carregamento de amplitude variável. Em seguida, um carregamento de espectro de suspensão padrão da indústria automobilística foi aplicado a uma geometria C(T) padrão para mostrar, na prática, como identificar a abertura e o fechamento de trincas, quando da utilização de análises numéricas, baseadas no método dos elementos finitos. Nesta análise foi, também, considerada/ analisada a influência de diferentes taxas de propagação de trincas. E, por fim, para minimizar os problemas de convergência que (comuns neste tipo de análise), a propagação da fissura baseou-se na liberação de nós nos instantes de carga mínima. Os resultados foram apresentados e discutidos na seção anterior.

Foi mostrado que é possível identificar a abertura e fechamento de fissuras utilizando o método dos elementos finitos. Na literatura existem poucos trabalhos que abordam simulação de propagação de fissuras com cargas aleatórias como o mostrado aqui. Normalmente apenas alguns blocos de carga são usados para reduzir a complexidade da análise, o que deve fornecer respostas conservadoras quando usado para desenvolver componentes estruturais. O próximo passo deste trabalho será realizar algumas análises adicionais, semelhantes a estas já feitas, com o mesmo modelo e histórico de carga com diferentes taxas de propagação de trinca, para identificar se o efeito de retardo pode ou não ser observado. E como caracterizá-lo de forma mais precisa. Espera-se, como trabalho futuro, que estes dados possam ser comparados com testes experimentais para calibração do modelo de propagação de trincas.

6. Referências

- [1] Miner, M. A. (1945). *Cumulative damage in fatigue*. Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 12, USA, p. A159-A164.
- [2] Paris, P. C., Erdogan, F. (1963). *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*. Journal of Basic Engineering, No 85, p. 528-533.
- [3] Head, A. K. (1953). *The Growth of Fatigue Cracks*. The Philosophical Magazine, Vol. 44, series7, p. 253.
- [4] Elber, W. (1971). *The significance of fatigue crack closure*. ASTM STP 486, p. 230- 242. DOI: 10.1520/STP486-EB.
- [5] Bell, P. D., Creager, M. (1974). *Crack growth analyses for arbitrary spectrum loading*. AFFDL-TR-

74-129, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright Patterson Air force Base, OH.

- [6] Newman, J. C. (1975). *A finite element analysis fatigue crack closure*. NASA TM X 72005, NASA, Hampton, VA.
- [7] Dill, H. D., Saff, C. R. (1976). *Spectrum crack growth prediction method based on crack surface displacement and contact analyses*. Fatigue crack growth under spectrum loads, ASTM STP 595, p. 306–319. DOI: 10.1520/STP595-EB.
- [8] Hairman, G. A., Provan, J. W. (1997). *Fatigue crack tip plasticity revisited*. The Issue of Shape Addressed, Theoretical and Appl. Fract. Mech. Journal, Vol. 26, p. 63-79.
- [9] Broek, D. (1982). *Elementary engineering fracture mechanics*. Kluwer Academic Publishers Group, Boston.
- [10] Dugdale, D. S. (1960). *Yielding of steel sheets containing slits*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, No. 2, p. 100-104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2.
- [11] Corbly, D. M., Packman, P. F. (1973). *On the influence of single and multiple peak overloads on fatigue crack propagation in 7075-T6511 aluminum*. Eng. Fract. Mech., Vol. 5, p. 479-497. DOI: 10.1016/0013-7944(73)90034-9.
- [12] Jonds, D., Wei, R. P. (1971). *An exploratory study of delay effects in fatigue crack growth*. Int. J. Fracture Mechanics, 7.
- [13] Crooker, T. W. (1971). *Effect of cycling on fatigue grade growth in high strength alloys*. NRL Report 7220.
- [14] Ricardo, L. C. H., Pimenta, P. M., Spinelli, D. (2002). *Crack Closure Simulation by Finite Element*. In: Blom, A. F. Fatigue 2002, Vol. 4/5, West Midlands, Emas, p. 2293 – 2300.
- [15] Swedlow, J. L. (1965). *The thickness effect and plastic flow in cracked plates*. PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, USA.
- [16] Ricardo, L. C. H. (2010). *Crack propagation by finite element analysis in automotive components*. SAE Brazil Conference, SAE paper 2010-36-0003I, 5-7 October, Sao Paulo, Brazil.
- [17] MSC/Patran (2008) r1, USA.
- [18] ABAQUS, V6.3 (2002). Hibbitt, Karlsson, Sorensen, Inc., Providence, RI.
- [19] Antunes, F. V., Rodrigues, D. M. (2008). *Numerical simulation of plasticity induced crack closure: identification and discussion of parameters*. Eng. Fracture Mechanics, Vol. 75, p. 3101-3120. DOI: 10.1016/j.engfrac_mech. 2007.12.009.
- [20] Pommier S. (2002). *Plane strain crack closure cyclic hardening*. Eng. Fracture Mechanics, Vol. 69 (3), p. 25–44. DOI: 10.1016/s0013-7944(01)00061-3.
- [21] Ogura K, Ohji K. (1977). *FEM analysis of crack closure and delay effect in fatigue crack growth under variable amplitude loading*. Eng. Fracture Mechanics, 9:471–80. DOI: 10.1016/0013-7944(77)90039-X.
- [22] Ogura K, Ohji K, Honda K. (1977). *Influence of mechanical factors on the fatigue crack closure. advances in research on the strength and fracture of materials*. In: Proceedings of the fourth International Conference on Fracture Mechanics, Vol. 2D. Waterloo, Canada. p. 1035–47.
- [23] McClung R. C., Sehitoglu H. (1989). *On the finite element analysis of fatigue crack closure-I: basic modeling issues*. Eng. Fracture Mechanics Vol. 33 (2), p. 237–52. DOI: 10.1016/0013-7944(89)90027-1.
- [24] Solanki K, Daniewicz S. R., Newman Jr., J. C. (2003). *Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects*. Eng. Fracture Mechanics, Vol. 70, p. 1475–89. DOI: 10.1016/s0013-7944(02)00168-6.
- [25] Jiang Y., Feng M., Ding F. (2005). *A re-examination of plasticity-induced crack closure in fatigue crack propagation*. International Journal of Plasticity, 21, p. 1720-40. DOI:10.1016/j.ijplas.2004.11.005.
- [26] Antunes F. V., Borrego L. F. P., Costa J. D. Ferreira J. M. (2004). *A numerical study of fatigue crack closure induced by plasticity*. Fatigue Fract. Eng. Mater. Structures, 27(9), p. 825–36. DOI: 10.1111/j.1460-2695.2004.00738.x.
- [27] Ricardo, L. C. H., Miranda C. A. J. (2016). *Influence of the crack propagation rate in the obtaining opening and closing stress intensity factor by finite element method*. Frattura ed Integrità Strutturale, Vol. 36, p. 201-215. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.36.20.
- [28] Newman Jr., J. C. (1981). *A crack closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading*. In: Chang J. B., Hudson C. M., editors. Methods and models for predicting fatigue crack growth under random loading, ASTM STP 748, Philadelphia, PA: ASTM, p. 53–84. DOI: 10.1520/STP748-EB.