

# Avances en la medición de engranajes industriales: Una aplicación móvil para la estimación de parámetros in situ

Daniel González-Monsalve<sup>1</sup>, Valentina Ibáñez-Retamal<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción, Chile. Email: danielgonzalezm@udec.cl

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Concepción, Chile. Email: vibanez2017@udec.cl

## Resumen

Este artículo presenta el desarrollo de una aplicación diseñada para mejorar la determinación de los parámetros geométricos de los engranajes rectos mediante el análisis de fotografías parciales. Este enfoque aborda las limitaciones de los métodos convencionales de metrología de engranajes, que a menudo requieren visibilidad completa del engranaje o el uso de equipos especializados. Al permitir mediciones in situ de los parámetros de los engranajes, la herramienta ofrece una solución práctica y accesible para las inspecciones de engranajes, especialmente beneficiosa en aplicaciones de mantenimiento, control de calidad y diagnóstico dentro de la industria manufacturera.

La metodología integra técnicas de visión por computadora y optimización para estimar con precisión los parámetros geométricos del engranaje a partir de imágenes parciales. El proceso comienza con la captura de imágenes del engranaje utilizando la cámara de un dispositivo móvil. El procesamiento posterior de las imágenes implica la detección de bordes para identificar los contornos de los dientes del engranaje. Un algoritmo de optimización utiliza un modelo matemático del perfil evolvente del engranaje, basado en los parámetros fundamentales del engranaje, para ajustar los bordes detectados, permitiendo la estimación de los parámetros sin necesidad de mediciones directas del diámetro.

**Palabras clave:** metrología de engranajes; procesamiento de imágenes; inspección in situ.

## Abstract

This paper presents the development of an application designed to enhance the determination of geometric parameters of spur gears through the analysis of partial photographs. This approach addresses the limitations of conventional gear metrology methods, which often require full visibility of the gear or the use of specialized equipment. By enabling in-situ measurements of gear parameters, the tool offers a practical and accessible solution for gear inspections, especially beneficial in maintenance, quality control, and diagnostic applications within the manufacturing industry.

The methodology integrates computer vision and optimization techniques to accurately estimate the gear's geometric parameters from partial images. The process begins with capturing images of the gear using a mobile device camera. Subsequent image processing involves edge detection to identify the contours of the gear teeth. An optimization algorithm then uses a mathematical model of the gear's involute profile, based on the fundamental gear parameters, to fit the detected edges, allowing parameter estimation without direct diameter measurements.

**Keywords:** gear metrology; image processing; in-situ inspection.

## 1. Introducción

La metrología de engranajes es un componente esencial en el mantenimiento y control de calidad dentro de la industria manufacturera. La precisión en la medición de los parámetros geométricos de los

engranajes es crucial para garantizar su correcto funcionamiento y longevidad, así como para prevenir fallos en sistemas mecánicos complejos [1]. Los métodos convencionales de metrología de engranajes, sin embargo, presentan limitaciones significativas. A menudo requieren una visibilidad completa del

engranaje y el uso de equipos especializados, lo cual puede no ser factible en entornos industriales donde la accesibilidad es limitada y los recursos pueden ser restringidos.

Diversos estudios han explorado alternativas basadas en visión por computadora y técnicas de procesamiento de imágenes para abordar estas limitaciones. En [2], se desarrolló un método para la medición de dimensiones de engranajes rectos basado en visión artificial, demostrando la viabilidad de este enfoque en la obtención de parámetros geométricos a partir de imágenes. En [3], se investigó la medición de parámetros de engranajes rectos utilizando visión artificial, mostrando mejoras en la precisión y eficiencia de las mediciones. En [4], se aplicó visión artificial para mejorar la seguridad y confiabilidad en la medición de perfiles de engranajes, destacando el potencial de estas tecnologías para reemplazar métodos tradicionales en ciertas aplicaciones. En [5], se propusieron algoritmos de visión por computadora para la inspección de engranajes rectos, subrayando la capacidad de estas técnicas para realizar mediciones precisas sin la necesidad de contacto físico con los componentes. En [6], se utilizó un enfoque de medición multidistancia basado en modelos para medir parámetros de forma de engranajes, demostrando la aplicabilidad de la visión por computadora en contextos industriales. En [7], se desarrolló un sistema de medición de parámetros de engranajes basado en visión artificial, reafirmando la utilidad de estas tecnologías en la metrología de engranajes. En [8], se propuso un método de medición en línea de alta precisión para engranajes de gran tamaño, utilizando una cámara de barrido lineal de alta resolución y una mesa rotativa de alta precisión.

El inconveniente común en todos estos estudios es que requieren imágenes completas del engranaje o bien equipos especializados. Este trabajo aborda el complejo reto de determinar con precisión los parámetros geométricos de los engranajes rectos en situaciones donde los métodos tradicionales no son aplicables debido a la falta de visibilidad completa del engranaje y la ausencia de equipos especializados. La principal innovación de este proyecto radica en el desarrollo de una aplicación móvil que permite determinar los parámetros de los engranajes rectos a partir de fotografías parciales. Este enfoque representa una desviación significativa de los métodos existentes, que dependen de la imagen completa del engranaje o de sofisticadas configuraciones de medición. La novedad de este método se encuentra en su capacidad para simplificar y hacer más accesible la metrología de engranajes sin comprometer la precisión.

## 2. Metodología

La metodología desarrollada en este trabajo se compone de tres fases principales. En la primera fase, se desarrolló un programa para obtener el perfil teórico de un engranaje recto a partir de parámetros de entrada específicos como el módulo, el ángulo de presión y el número de dientes. En la segunda fase, se implementó un programa que permite detectar el perfil del diente del engranaje a partir de una imagen tomada con un dispositivo móvil. Finalmente, en la tercera fase, se diseñó un algoritmo de optimización que ajusta los puntos detectados al perfil teórico para estimar con precisión los parámetros geométricos del engranaje. Todas estas fases se implementaron utilizando Python.

### 2.1. Generación del perfil teórico del engranaje

Esta etapa del trabajo se basa en gran medida en el estudio presentado en la referencia [9] y se centra exclusivamente en engranajes rectos de perfil evolvente y sin ajustes de perfil.

El perfil del diente del engranaje se divide en tres partes principales: la cabeza del diente, el flanco y el entalle del diente, cada una con descripciones matemáticas distintas.

#### 2.1.1. Definiciones y fórmulas básicas

Para describir completamente la geometría básica del perfil del diente, se utilizan los siguientes parámetros de entrada: el módulo  $m$ , el ángulo de presión  $\alpha_t$  y el número de dientes  $Z$ .

1. Radio del círculo primitivo  $r$ :

$$r = mZ/2$$

2. Radio del círculo exterior  $r_a$ :

$$r_a = r + m$$

3. Radio del círculo de base  $r_b$ :

$$r_b = r \cos(\alpha_t)$$

4. Función involuta  $\text{inv}(\alpha)$ :

$$\text{inv}(\alpha) = \tan(\alpha) - \alpha$$

5. Ángulo del espesor del diente  $\Psi(r_y)$ :

$$\Psi(r_y) = \frac{\pi}{2Z} + \text{inv}(\alpha_t) - \text{inv}(\alpha_y)$$

donde  $\cos(\alpha_y) = r_b/r_y$ .

#### 2.1.2. Cabeza del diente

La cabeza del diente es la porción de la superficie de la punta entre los flancos opuestos de un diente. Esta región puede aproximarse a un arco de circunferencia de radio  $r_a$ . Las ecuaciones paramétricas que describen esta región son:

$$x = r_a \sin(\Psi)$$

$$y = r_a \cos(\Psi)$$

donde  $\Psi \in [0, \Psi(r_a)]$ .

### 2.1.3. Flanco del diente

El flanco del diente, más precisamente el flanco utilizable, se basa en una curva evolvente. Las ecuaciones paramétricas que describen esta curva son:

$$x = r_y \sin(\Psi(r_y))$$

$$y = r_y \cos(\Psi(r_y))$$

donde  $r_y \in [r_b, r_a]$ .

### 2.1.4. Entalle

El entalle es la curva que une el flanco utilizable con la superficie de la raíz del diente. En general, esta región no es una curva simple y depende de la geometría de la herramienta y del proceso de corte utilizado para fabricar el engranaje [10]. Sin embargo, siguiendo un método similar al descrito en [9], se puede aproximar mediante un arco de circunferencia tangente al flanco y al círculo de base.

El centro de este arco está dado por:

$$x_f = r_b \sin(\psi_f) \sec(\Psi(r_b) - \psi_f)$$

$$y_f = r_b \cos(\psi_f) \sec(\Psi(r_b) - \psi_f)$$

donde

$$\psi_f = \Psi(r_b) - \arctan\left(\frac{r_b^2 - r_f^2}{2r_b r_f}\right)$$

El radio del entalle puede determinarse a partir de:

$$r_e = r_b \tan(\Psi(r_b) - \psi_f)$$

De esta forma, las ecuaciones paramétricas que describen esta curva son:

$$x = x_f - r_e \cos(\theta)$$

$$y = y_f - r_e \sin(\theta)$$

donde  $\theta \in [\pi - \Psi(r_b), \frac{3\pi}{2} - \psi_f]$ .

### 2.1.5. Implementación

Se implementó un programa en Python que utiliza las ecuaciones paramétricas descritas previamente para construir la curva del perfil del diente punto a punto. Aprovechando la simetría del diente, los cálculos se realizan únicamente para una mitad del diente, y luego se combinan con los puntos reflejados para obtener el perfil completo.

Para garantizar la suavidad de la curva, se generan un total de 50 puntos en la cabeza del diente, 500 en el flanco del diente y 50 en el entalle. Esto asegura una representación precisa y continua de las diferentes secciones del perfil.

Además, se añadieron dos funcionalidades adicionales: la capacidad de trasladar y rotar los puntos generados. Estas opciones permiten alinear y comparar con mayor precisión los puntos generados con los puntos obtenidos de una imagen en las etapas posteriores.

En las siguientes figuras se muestran ejemplos de perfiles de engranajes generados con diferentes conjuntos de parámetros utilizando el programa desarrollado.

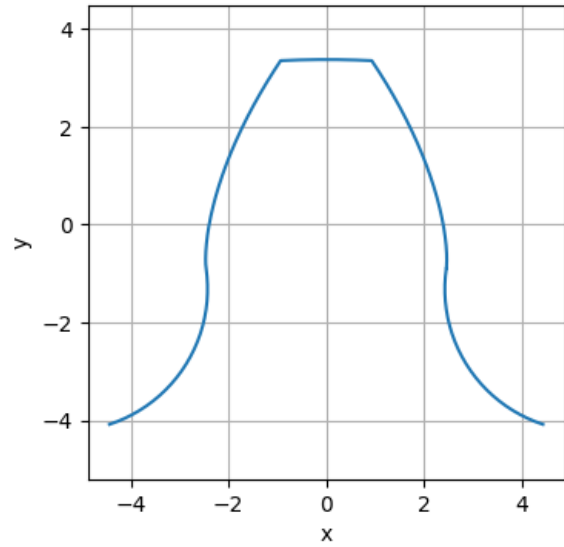


Figura 1. Perfil del diente generado con  $m = 3$ ,  $\alpha_t = 20^\circ$  y  $Z = 12$ .

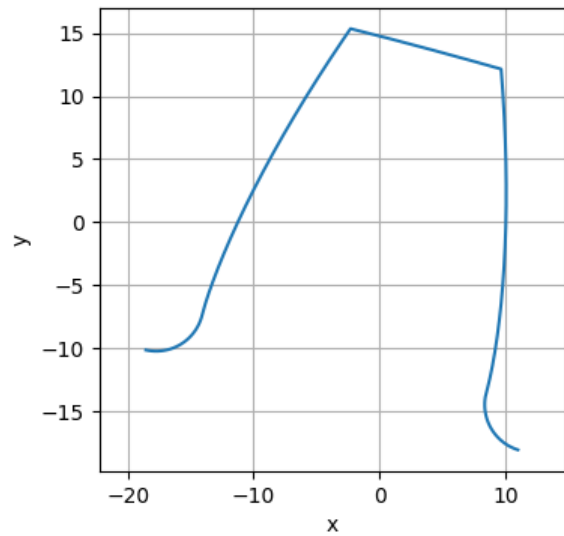


Figura 2. Perfil del diente generado con paso diametral  $P = 2$  (equivalente a un módulo  $m = 12,7$ ),  $\alpha_t = 14,5^\circ$  y  $Z = 60$ . Los puntos se rotaron  $15^\circ$ .

## 2.2. Detección del perfil del diente a partir de una imagen

En esta etapa, se desarrolló un script en Python para detectar el perfil del diente de un engranaje a partir de una imagen. Este proceso consiste en tres pasos principales: el preprocesamiento de la imagen, la aplicación de una técnica para la detección de bordes y el ajuste y escalado de las coordenadas obtenidas.

### 2.2.1. Preprocesamiento de la imagen

La imagen se convierte a escala de grises para simplificar su procesamiento. Este paso es crucial porque la conversión a escala de grises reduce la cantidad de información que el algoritmo necesita procesar, enfocándose solo en las intensidades de los píxeles [11].

Se espera que la imagen utilizada contenga solo un diente de engranaje para asegurar una detección precisa del perfil.

### 2.2.2. Detección y extracción de contornos

Se aplica un filtro de Sobel a la imagen en escala de grises utilizando la implementación disponible en la librería `skimage`. El filtro de Sobel ofrece un buen equilibrio entre precisión y complejidad computacional, lo que lo hace adecuado para esta tarea [12]. Este filtro detecta los bordes resaltando los cambios abruptos en la intensidad de la imagen.

Cuando los bordes son difusos o existen otros detalles en la imagen, el algoritmo puede detectar múltiples contornos. En estos casos, típicamente el contorno más largo corresponde al perfil del diente necesario y, por lo tanto, este es seleccionado.

### 2.2.3. Ajuste y escalado de coordenadas

Inicialmente, las coordenadas del contorno están en píxeles. Para realizar comparaciones precisas y análisis geométrico, es necesario convertir estas coordenadas a medidas reales. El programa permite aplicar un factor de escala que convierte las posiciones de los puntos de píxeles a milímetros.

Este ajuste es esencial para asegurar que las coordenadas del contorno del perfil del diente se correspondan con las dimensiones reales del engranaje.

En la Figura 3 se muestran tres ejemplos de perfiles de dientes de engranajes con sus bordes detectados.

## 2.3. Optimización

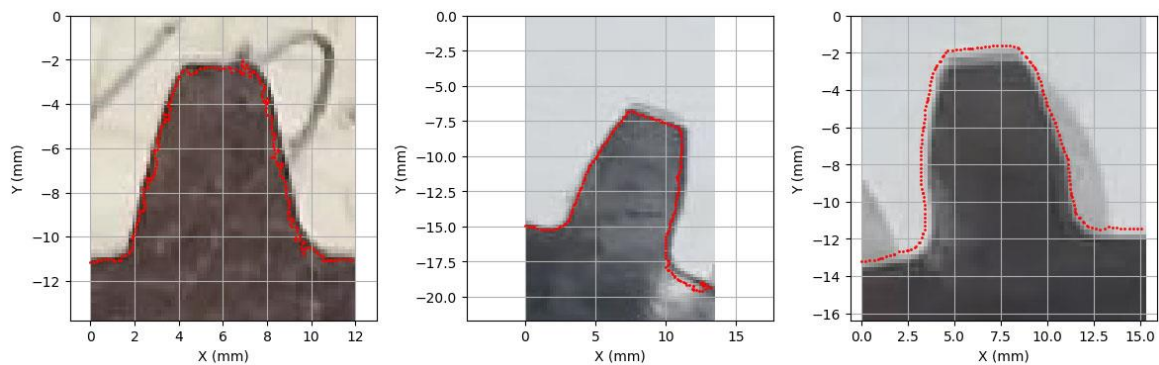


Figura 3. Perfiles de dientes de engranajes con bordes detectados

En esta etapa, se desarrolló un script en Python para identificar los parámetros geométricos del perfil del diente del engranaje, ajustando el módulo y el ángulo de presión para que coincidan con los puntos del contorno obtenidos de una imagen. Este proceso consta de varias fases: la definición de la función de costo, una optimización inicial de parámetros y un ajuste a valores admisibles.

### 2.3.1. Definición de la función de costo

La función de costo se define como la suma de las distancias euclidianas al cuadrado entre cada punto observado (extraído de la imagen) y el punto más cercano en el modelo teórico del diente. Formalmente, sea  $\Omega$  el conjunto de puntos observados y  $\Omega_0(\mathbf{p}, Z)$  el conjunto de puntos del modelo teórico, la función de costo se expresa como:

$$C(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0(\mathbf{p}, Z)} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$$

Aquí,  $\mathbf{p}$  es un vector que contiene los siguientes parámetros:

- $m$ : el módulo,
- $\alpha_t$ : el ángulo de presión,
- $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ : la posición del conjunto de puntos, y
- $\beta$ : el ángulo de rotación del conjunto de puntos.

El número de dientes  $Z$  típicamente se conoce de antemano y no necesita ser optimizado. Estos parámetros determinan la geometría y la orientación del modelo teórico del perfil del diente, permitiendo un ajuste preciso a los puntos observados extraídos de la imagen.

### 2.3.2. Optimización inicial de parámetros

En esta etapa, se busca el valor óptimo de  $\mathbf{p}$  para minimizar la función de costo definida anteriormente. Para ello, se utiliza el método de Nelder-Mead. Este método fue seleccionado por su simplicidad y efectividad en la minimización de funciones sin derivadas, lo cual lo hace particularmente adecuado

para este problema específico de ajuste de parámetros en perfiles de dientes de engranajes [13].

El método de Nelder-Mead no requiere el cálculo de derivadas y es robusto en la optimización de funciones que pueden no ser suaves o que presentan múltiples mínimos locales. Además, es sencillo de implementar y ofrece resultados confiables en una amplia variedad de problemas de optimización [13].

Se utiliza la implementación del método de Nelder-Mead disponible en la librería `scipy.optimize` de Python.

### 2.3.3. Ajuste a valores admisibles

En esta etapa, se considera que los valores del módulo y del ángulo de presión no pueden tomar cualquier valor, sino que deben restringirse a ciertos valores preferidos. Por lo tanto, se limita la búsqueda a estos valores predefinidos.

Para el módulo, la Tabla 1 muestra los valores preferidos específicos. Para el ángulo de presión, se consideran los valores de 14,5°, 20°, 22,5° y 25° [14].

Tabla 1. Valores preferidos del módulo y paso diametral.

Valores preferidos	
Paso diametral ( $P$ )	Módulo ( $m$ )
200	0,2
120	0,25
96	0,3
80	0,4
72	0,5
64	0,6
48	0,7
32	0,8
24	1
20	1,25
16	1,5
12	2
10	2,5
9	3
8	4
6	5
5	6
4	8
3	10
2	12
1,5	16
1	20
0,75	25
0,5	32
	40
	50

Fuente: [15].

Formalmente, si  $\mathbf{p}_0$  es el vector de parámetros óptimos encontrado en la optimización inicial, se procede a identificar los valores de módulo y ángulo de presión admisibles más cercanos a los valores encontrados, tanto por defecto como por exceso.

Luego, para cada uno de estos valores identificados, se repite la optimización, pero esta vez fijando el módulo y el ángulo de presión (es decir, optimizando únicamente la posición y el ángulo de rotación), y se seleccionan aquellos valores que resultaron en una menor función de costo entre estos valores identificados.

Este enfoque garantiza que los parámetros optimizados se alineen con los estándares industriales y las restricciones prácticas, asegurando un ajuste preciso y viable para el perfil del diente del engranaje.

## 3. Resultados

En esta sección, se presentan los resultados del análisis de tres engranajes distintos. Para cada engranaje, se siguieron los siguientes pasos:

1. Se tomaron imágenes completas de los engranajes, utilizando detalles visuales conocidos (como el tamaño de los agujeros) para escalarlas correctamente.
2. Se recortaron imágenes de dientes individuales a partir de las fotografías de los engranajes.
3. Se verificó el código utilizando tres dientes distintos para cada engranaje.
4. Se obtuvieron los valores de módulos y ángulos de presión para cada diente y se compararon con los valores nominales conocidos.

### 3.1. Análisis del engranaje 1

El primer engranaje analizado tiene las siguientes características:  $Z = 30$  dientes, un paso diametral  $P = 12$  (equivalente a un módulo  $m = 2,1167$ ) y un ángulo de presión de 14,5°.





Figura 4. Engranaje 1.

Tabla 2. Resultados del análisis del engranaje 1.

	Módulo ( $m$ )	Ángulo de presión ( $\alpha_t$ )
Diente 1	2,1167	14,5°
Diente 2	2	14,5°
Diente 3	2,1167	14,5°

### 3.2. Análisis del engranaje 2

El segundo engranaje analizado tiene las siguientes características:  $Z = 24$  dientes, un paso diametral  $P = 12$  (equivalente a un módulo  $m = 2,1167$ ) y un ángulo de presión de 14,5°



Figura 5. Engranaje 2.

Tabla 3. Resultados del análisis del engranaje 2.

	Módulo ( $m$ )	Ángulo de presión ( $\alpha_t$ )
Diente 1	2,54	14,5°
Diente 2	2,54	14,5°
Diente 3	2,5	14,5°

### 3.3. Análisis del engranaje 3

El tercer engranaje analizado tiene las siguientes características:  $Z = 30$  dientes, un paso diametral  $P = 6$  (equivalente a un módulo  $m = 4,2333$ ) y un ángulo de presión de 14,5°



Figura 6. Engranaje 3.

Tabla 4. Resultados del análisis del engranaje 3.

	Módulo ( $m$ )	Ángulo de presión ( $\alpha_t$ )
Diente 1	5	14,5°
Diente 2	5	14,5°
Diente 3	4,2333	14,5°

### 3.4. Discusión

Los resultados obtenidos para cada engranaje muestran una buena concordancia con los valores nominales esperados. Las diferencias observadas entre los valores medidos y los valores nominales se deben principalmente a la precisión de la técnica de detección y optimización empleada, así como a posibles variaciones en las fotografías utilizadas para el análisis.

### 4. Conclusiones

La precisión del método desarrollado fue evaluada utilizando diferentes dientes del mismo engranaje, lo cual demostró la robustez y consistencia de los resultados obtenidos. Las pequeñas discrepancias encontradas entre los valores medidos y los valores nominales se deben principalmente a la precisión de la técnica de detección y optimización empleada, así como a posibles variaciones en las fotografías utilizadas para el análisis. Esto sugiere que el método es efectivo y fiable para la identificación de parámetros geométricos de perfiles de dientes de engranajes, aunque con margen para mejoras adicionales.

Para mejorar el análisis, es crucial considerar otros parámetros geométricos, como la corrección del perfil (*profile shifting*), que no fueron considerados en el presente estudio. Incorporar estos parámetros podría

proporcionar una descripción más precisa y completa del perfil del diente. Además, se debe idear una mejor manera de aplicar las medidas reales a las imágenes, posiblemente utilizando técnicas de calibración más avanzadas o referencias más precisas en las fotografías. Estas mejoras potenciales podrían aumentar significativamente la exactitud y utilidad práctica del método propuesto, extendiendo su aplicabilidad a un rango más amplio de situaciones en la industria de la metrología de engranajes.

## 5. Referencias

- [1] D.V. Andreev. “*The role of measurement and the significance of metrology in industrial production*”. Journal of Physics: Conference Series, vol. 2373, n.º 5, 2022. [PDF]. Disponible en: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052031>
- [2] H. Du, W. Jin, X. Zhang, J. Hu. “*A method of dimension measurement for spur gear based on machine vision*”. 2011 International Conference on Multimedia and Signal Processing, vol. 1, pp. 243-246, 2011. [PDF]. Disponible en: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5957416>
- [3] K. Joshi, B. Patil. “*Measurement of Spur Gear Parameters Using Machine Vision*”. Proceedings of International Conference on Intelligent Manufacturing and Automation: ICIMA 2020, pp. 31-37, 2020.
- [4] M.H. Ali, S. Kurokawa, K. Uesugi. “*Application of machine vision in improving safety and reliability for gear profile measurement*”. Machine Vision and Applications, vol. 25, pp. 1549-1559, 2014.
- [5] E.S. Gadelmawla. “*Computer vision algorithms for measurement and inspection of spur gears*”. Measurement, vol. 44, n.º 9, pp. 1669-1678, 2011.
- [6] M. Pillarz, A. von Freyberg, A. Fischer. “*Gear shape parameter measurement using a model-based scanning multi-distance measurement approach*”. Sensors, vol. 20, n.º 14, pp. 3910, 2020. [PDF]. Disponible en: <https://www.mdpi.com/1424-8220/20/14/3910>
- [7] W. Wang, F. Guan, S. Ma, J. Li. “*Measurement system of gear parameters based on machine vision*”. Measurement and Control, vol. 48, n.º 8, pp. 242-248, 2015. [PDF]. Disponible en: <https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0020294015559597>
- [8] F. Wan, H. Luo, J. Liu. “*Online high-precision vision measurement method for large-size gear parameters*”. Proceedings of the 2019 2nd International Conference on Robot Systems and Applications, pp. 20-24, 2019.
- [9] G. Zhai, Z. Liang, Z. Fu. “*A mathematical model for parametric tooth profile of spur gears*”. Mathematical Problems in Engineering, vol. 2020, n.º 1, pp. 7869315, 2020. [PDF]. Disponible en: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1155/2020/7869315>
- [10] S. Senthilvelan, R. Gnanamoorthy. “*Effect of gear tooth fillet radius on the performance of injection molded Nylon 6/6 gears*”. Materials & Design, vol. 27, n.º 8, pp. 632-639, 2006.
- [11] T. Wu, L. Wang, J. Zhu. “*Image Edge Detection Based on Sobel with Morphology*”. 2021 IEEE 5th Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC), vol. 5, pp. 1216-1220, 2021. [PDF]. Disponible en: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9586895>
- [12] C.-C. Zhang, J.-D. Fang. “*Edge detection based on improved Sobel operator*”. 2016 International Conference on Computer Engineering and Information Systems, pp. 129-132, 2016. [PDF]. Disponible en: <https://www.atlantis-press.com/proceedings/ceis-16/25867843>
- [13] C.J. Price, I.D. Coope, D. Byatt. “*A convergent variant of the Nelder–Mead algorithm*”. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 113, pp. 5-19, 2002. [PDF]. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1014849028575>
- [14] R. Miller. “*Designing very strong gear teeth by means of high pressure angles*”. Gear Technology, vol. 34, n.º 4, pp. 66-79, 2017. [PDF]. Disponible en: <https://www.geartechnology.com/ext/resources/issues/0617x/high-pressure-angles.pdf>
- [15] G. Michalec, F. Buchsbaum, H. Tanaka, L. Shuett, J. Chiaramonte, S. Sondej, M. Hasranah, L.C. Quinteros, M. Epstein. “*Elements of metric gear technology*”. Stock Drive Products & Sterling Instrument, 2009. [PDF]. Disponible en: <https://www.sdp-si.com/PDFS/Elements-of-Metric-Gear-Technology.pdf>