

Atenuación de la interacción ruido dinámica vía selección de posiciones de sensores en un control activo de vibraciones mediante realimentación de aceleración

Federico R. Masch¹, Rogelio L. Hecker^{2,3}

¹Grupo de Mecatrónica Aplicada, Facultad Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Email: maschfederico@ing.unlpam.edu.ar

²Grupo de Mecatrónica Aplicada, Facultad Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Email: hecker@ing.unlpam.edu.ar

³Comisión Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.

Resumen

Este trabajo presenta una metodología de diseño para el control activo de vibraciones mediante realimentación proporcional de aceleración, considerando las posiciones de los acelerómetros. La metodología utiliza un filtro modal discreto para estimar las componentes de aceleración de los modos de vibración. Este filtro desacopla la sintonización del controlador de su dependencia con las posiciones de los acelerómetros, reduciendo así la complejidad del diseño. La metodología aborda el posicionamiento de sensores minimizando una medida sobre la matriz de ganancias del filtro modal en un conjunto finito de configuraciones posibles. Este criterio reduce la interacción de ruido de los acelerómetros con la dinámica de la estructura flexible. Las simulaciones demuestran que la metodología identifica las posiciones de los sensores que promueven una reducción del impacto de su componente ruido en el desempeño del control activo.

Palabras clave: posiciones de los sensores; control activo de vibraciones; realimentación de aceleración;

Abstract

This work presents a design methodology for active vibration control using proportional acceleration feedback, considering the positions of accelerometers. The methodology utilizes a discrete modal filter to estimate the acceleration components of vibration modes. This filter decouples the controller tuning from its dependence on accelerometer positions, thus reducing design complexity. The methodology addresses sensor positioning by minimizing a measure of the modal filter gain matrix over a finite set of possible positioning configurations. This criterion reduces the interaction of accelerometer noise with the dynamics of the flexible structure. Simulations show that the methodology identifies sensor positions that promote a reduction in the impact of their noise component on the performance of active control.

Keywords: sensor placement, observation spillover, static output feedback, acceleration feedback

1. Introducción

Una estructura mecánica flexible sometida a fuerzas de perturbación experimenta el fenómeno de vibraciones mecánicas. Este produce desplazamientos no deseados que pueden degradar su desempeño y hasta comprometer su integridad mecánica [1]. Algunos ejemplos en los cuales este fenómeno es considerado como no deseado son: estructuras

mecánicas con fines espaciales [2],[3] y [4]; generadores eólicos [5]; radiotelescopios terrestres [6], barras de pulverización [7], [8] y [9] y la generación de ruido por vibraciones estructurales [10] y [11].

Una de las alternativas para dominar el fenómeno de vibraciones mecánicas es el control activo de vibraciones. El control activo modifica la respuesta de

la estructura flexible ante fuerzas de perturbación, mediante fuerzas de control gobernadas por un controlador en base a información del estado de la dinámica de la estructura obtenida mediante sensores instalados sobre la misma.

Se han propuesto diversas estrategias de realimentación en el área del control activo de vibraciones. Sin embargo, su viabilidad de realización e implementación se encuentran determinadas, entre otras circunstancias, por el tipo de sensores. En este sentido, uno de los sensores más utilizados es el acelerómetro, el cual en base a los últimos desarrollos de la tecnología MEMS, se ha convertido en un sensor de bajo costo, pequeñas dimensiones y peso reducido.

Diversos son los trabajos que han utilizado acelerómetros en la implementación de un control activo de vibraciones. Por ejemplo, [12] implementó un controlador diseñado con metodologías H2/LQG basado en la realimentación de aceleración y demostró su efectividad para suprimir las vibraciones en estructuras edilicias sujetas a sismos. [13] propuso un controlador con una dinámica de segundo orden el cual utiliza una realimentación de aceleración. [14] propuso una realimentación de aceleración el cual utiliza una configuración de actuador y sensor colocados en una misma posición sobre la estructura flexible. Todos estos trabajos tienen en común el hecho que proponen un controlador con una dinámica de compensación.

El diseño de un control activo de vibraciones resulta un problema de ingeniería desafiante debido a que las vibraciones mecánicas son un fenómeno físico de carácter distribuido. Esta característica antepone una toma de decisión entre la dimensión del modelo matemático utilizado para describir la dinámica de la estructura flexible y su capacidad para describir la interacción del controlador con la estructura flexible. Esta situación de compromiso pone de manifiesto que los controladores diseñados en base a modelos reducidos pueden experimentar una fuerte degradación en su desempeño y hasta una posible pérdida de estabilidad, [15], en su interacción con la estructura flexible.

Otro aspecto a tener en cuenta en la etapa de diseño son las posiciones de los actuadores y sensores. Esta problemática ha sido abordada por diversos trabajos [16-18], que han propuesto metodologías para la selección de posiciones de actuadores y/o sensores pero que requieren información sobre la dinámica de la estructura flexible que ha quedado excluida del modelo.

Este trabajo presenta una metodología para el diseño de un control activo de vibraciones mediante

realimentación proporcional de aceleración, considerando las posiciones de los acelerómetros como variables de diseño. Esta estrategia de control no posee dinámica de compensación y por la tanto, reduce la complejidad computacional en la etapa de diseño ya que el controlador es directamente una suma ponderada de las señales de los acelerómetros. La metodología hace uso del concepto de filtro modal discreto e implementa la metodología de diseño propuesta por [20], logrando así que la sintonización del controlador sea invariante a las posiciones de los acelerómetros y promoviendo una atenuación en la interacción de las componentes de ruido de los acelerómetros con la dinámica de la estructura flexible.

1.1. Modelo matemático y estrategia de control

En este trabajo, se describe la dinámica del cuerpo o estructura flexible mediante un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = B_u f_u(t) + B_p f_p(t), \quad (1)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el descriptor temporal del i -ésimo coordenada de desplazamiento, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz que modela el proceso de disipación proporcional, la matriz $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ describe la rigidez de la estructura flexible y las matrices $B_u \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n \times n_p}$ modelan la interacción de las fuerzas de control y perturbación ordenadas en los vectores $f_u(t)$ y $f_p(t)$ respectivamente.

Al abordar el diseño de un control activo de vibraciones, la cantidad de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de la estructura flexible puede ser computacionalmente prohibitiva. Esto impone un compromiso entre la complejidad de diseño del controlador y la potencia de la metodología de diseño para describir y predecir la dinámica resultante. Usualmente, en estos casos, se divide el conjunto de ecuaciones presentado en la Ecuación (1) en dos grupos: dinámica controlada y dinámica no controlada, por lo tanto, el modelo matemático presentado en dicha ecuación queda particionado y representado en una notación matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_c & M_a \\ M_a^T & M_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c & C_a \\ C_a^T & C_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} K_c & K_a \\ K_a^T & K_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_{nc}(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} B_{cu} \\ B_{ncu} \end{bmatrix} f_u(t) + \begin{bmatrix} B_{cp} \\ B_{ncp} \end{bmatrix} f_p(t), \quad (2) \end{aligned}$$

donde las matrices con subíndice c describen la dinámica controlada, el subíndice nc señala las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica no controlada y el subíndice a identifica los acoplamientos entre ambas dinámicas.

La dinámica controlada es utilizada en la etapa de diseño del controlador ignorando su acoplamiento con la dinámica no controlada. Es común que este modelo describa la dinámica de los modos de vibración de baja frecuencia. Estos aportan las componentes mayoritarias en la descripción del desplazamiento de la estructura flexible. En una notación matricial el modelo de la dinámica controlada desacoplada queda descrita de la siguiente manera:

$$M_c \ddot{x}_c(t) + C_c \dot{x}_c(t) + K_c x_c(t) = B_{cu} f_u(t) + B_{cp} f_p(t). \quad (3)$$

Por otro lado, la implementación de este control activo de vibraciones asume la instalación de $n_s \geq n_c$ acelerómetros sobre la estructura flexible. El diseño de este control asume un conjunto de $n_l \geq n_s$ posiciones candidatas para estos n_s acelerómetros estableciendo así un conjunto S con $C_{n_s}(n_p)$ configuraciones posibles de posiciones para estos acelerómetros. También se asumirá que estos acelerómetros presentan una componente de ruido en sus señales de salidas y una ausencia de dinámica.

La señal de salida de estos acelerómetros, considerando tanto la dinámica controlada como la no controlada, ver modelo en la Ecuación (2), quedan modeladas a partir de la siguiente expresión:

$$y(k, t) = [P_c(k) \quad P_{nc}(k)] \begin{bmatrix} \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + r(t), \quad (4)$$

donde $r(t) \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$ representa las componentes de ruido de los n_s acelerómetros. Las matrices $P_c(k) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_c}$ y $P_{nc}(k) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_{nc}}$ son las matrices de interacción de los acelerómetros con la estructura flexible. La variable k denota la k -ésima configuración posible de posiciones de los acelerómetros definidas en S .

La estrategia de control activo de vibraciones a partir de la realimentación proporcional de aceleración propone que las fuerzas de control sea una combinación lineal ponderada de las señales de los acelerómetros. En notación matricial esta estrategia es descrita de la siguiente manera:

$$f_u(k, t) = -K_s y(k, t), \quad (5)$$

donde la matriz $K_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_s}$ es la matriz de ganancias del controlador.

En la etapa de diseño, se considera que las señales de los acelerómetros $y(k, t)$ presentadas en la Ecuación (4), son conformadas únicamente por las componentes de aceleración de la dinámica controlada y el ruido de los sensores. El término de la dinámica no controlada en la ecuación (4) ha sido ignorado ya que esta no es objeto de estudio de trabajo. La realimentación en base a ley de control presentada en la Ecuación (5), modifica la dinámica controlada de la estructura flexible, quedando esta descrita de la siguiente manera:

$$[M_c + B_{cu} K_s P_c(k)] \ddot{x}_c(t) + C_c \dot{x}_c(t) + K_c x_c(t) = B_{cp} f_p(t) - B_{cu} K_s r(t). \quad (6)$$

donde es posible observar que la realimentación ponderada de aceleración modifica la matriz de inercia de la dinámica controlada. Esta modificación no solo está sujeta a la matriz de ganancias K_s , sino que también está sujeta a la disposición de las fuerzas de control mediante la matriz B_{cu} , y a las posiciones de los acelerómetros a partir de la matriz $P_c(k)$.

1.2. Análisis de la problemática de selección de posición de acelerómetros en la etapa de diseño del controlador

El primer aspecto emergente al considerar las posiciones de los acelerómetros es que su introducción incrementa el volumen de cómputo en la etapa de diseño del controlador de manera sustancial. Por ejemplo, disponiendo de cuatro acelerómetros y veinte posiciones candidatas para estos, la cantidad de configuraciones posibles de posición asciende a $C_4(20) = \frac{20!}{4!16!} = 4865$. En este contexto, definido el desempeño esperado del controlador, será necesario evaluar la existencia de la matriz de ganancias K_s para cada una de las 4865 configuraciones.

El segundo aspecto que emerge al considerar las posiciones de los acelerómetros es la relación de compromiso entre el desempeño del controlador y la excitación no deseada de la estructura flexible producto de la componente de ruido presente en la señal de salida de los acelerómetros, ver Ecuación (4). Las componentes de ruido reunidas en $r(t)$, excitan la dinámica controlada a lazo cerrado a partir del término $B_{cu} K_s r(t)$, presente en la Ecuación (6). Establecido un desempeño deseado, determinadas configuraciones de posición podrían promover una matriz de ganancias K_s del controlador de forma tal de establecer una sustancial excitación no deseada a causa del ruido presente en las señales de los acelerómetros.

Estos dos aspectos que se pusieron a consideración ponen de manifiesto el impacto de las posiciones de los acelerómetros en este tipo de control activo de vibraciones. Este trabajo se enfoca en la dependencia de la sintonización del controlador con respecto a las posiciones de los acelerómetros y la necesidad de mitigar la interacción entre ruido y dinámica. El análisis de los márgenes estabilidad del controlador y su dependencia del posicionamiento de los sensores, cuando estos interactúan con la estructura flexible, se dejará para investigaciones futuras.

2. Metodología

La metodología que se propone para abordar estas problemáticas se basa en asumir que la matriz de ganancias del controlador K_s , Ecuación (5), como el producto de dos matrices:

$$K_s = K_{sf}\Omega. \quad (8)$$

Como se verá más adelante, la matriz $K_{sf} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$ en la Ecuación (8) es la encargada de establecer la dinámica de lazo cerrado siendo esta invariante antes las posiciones de los acelerómetros. Mientras que la matriz $\Omega \in \mathbb{R}^{n_c \times n_s}$ es la responsable de establecer una estimación del vector aceleración de la dinámica controlada a partir de las señales de los acelerómetros mediante la conformación de un filtro modal discreto:

$$\hat{x}_c(k, t) = \Omega(k)y(k, t). \quad (9)$$

Al introducir el modelo de la señal de los acelerómetros presentada en la Ecuación (4), pero ignorando las componentes de aceleración de la dinámica no controlada, en la Ecuación (9), ya que esta no es objeto de estudio como ya se mencionó, la estimación queda modelada de la siguiente manera:

$$\hat{x}_c(k, t) = \Omega(k)P_c(k)\ddot{x}_c(t) + \Omega r(t). \quad (10)$$

La matriz de ganancias $\Omega(k)$ en la Ecuación (10), se determina a partir de información de la dinámica controlada de la siguiente manera:

$$\Omega(k) = [P_c^T(k)P_c(t)]^{-1}P_c^T(k), \quad (11)$$

en base a la metodología propuesta en [20]. Con esta definición, el producto $\Omega(k)P_c(k) = I_c$ resulta una matriz identidad, lo cual promueve una estimación perfecta. Esto significa, obtener la separación de las componentes de aceleración de cada descriptor temporal de la dinámica controlada y disponer de éstas en las respectivas señales de salida del filtro. Para que esto suceda sobre cada una de las configuraciones de posición, la cantidad de acelerómetros deben ser al menos igual a la cantidad de componentes de aceleración que se desean aislar,

$n_s \geq n_c$, [20]. Por otro lado, se puede observar que la estimación de aceleraciones propuesta en la Ecuación (10), tiene una componente residual. Esta componente no deseada es la combinación lineal ponderada de las componentes de ruido de los n_s acelerómetros descrita por el sumando $\Omega(k)r(t)$ y que será un nuevo agente de perturbación de la estructura flexible.

En base a la factorización de la matriz de ganancias del controlador K_s propuesta en la Ecuación (8) y la determinación de la matriz $\Omega(k)$ a partir de la Ecuación (11), la ley de control presentada en la Ecuación (5), y constituida en base a la dinámica controlada definida en la Ecuación (3), queda definida de la siguiente manera:

$$f_u(t) = -K_s\hat{x}_c(t). \quad (12)$$

La dinámica controlada tras la realimentación propuesta resulta:

$$[M_c + B_{cu}K_{sf}]\ddot{x}_c(t) + C_c\dot{x}_c(t) + K_c x_c(t) = -B_{cu}K_{sf}\Omega r(t) + B_{cp}f_p(t), \quad (13)$$

donde puede observarse nuevamente que la realimentación modifica la inercia de la dinámica, pero en este caso esta modificación es independiente de las posiciones de los acelerómetros. Esto resulta tras la factorización de la matriz de ganancias del controlador propuesta en la Ecuación (8) donde la condición $\Omega(k)P_c(k) = I_c$ tras la introducción de un filtro modal para estimar las aceleraciones. Como resultado de esta factorización el volumen de cómputo en la etapa de diseño del controlador se reduce sustancialmente tras desacoplar el problema de selección de posición de los sensores del problema de sintonización de la dinámica a lazo cerrado.

El problema de selección de posición de los acelerómetros en este trabajo adopta el criterio propuesto por [20]. En dicho trabajo se estableció un criterio de selección de posición con la necesidad de atenuar las componentes de ruido de los sensores en las señales de salida del filtro modal. Este criterio se basa en la identificación de la k^* -ésima configuración de posición de los sensores cuya medida $f_c(k^*) = \|\Omega(k^*)\|_F$, denominada factor f_c , sobre la matriz de ganancias del filtro modal resulta la mínima sobre el conjunto finito de configuraciones posibles S , es decir:

$$\|\Omega(k^*)\|_F \leq \|\Omega(k)\|_F \quad \forall k \in S, \quad (14)$$

donde S es el conjunto finito de configuraciones de posición de los acelerómetros. Este criterio selecciona las posiciones para los acelerómetros que promuevan que la matriz $\Omega(k^*) \rightarrow 0$ y por lo tanto $K_s \rightarrow 0$,

logrando así promover la atenuación en la interacción ruido-dinámica, es decir, $B_{cu}K_{sf}\Omega(k^*)r(t) \rightarrow 0$, ver Ecuación (13).

3. Caso de estudio

Con el objetivo de ejemplificar la utilización de la metodología propuesta en este trabajo, se presenta el diseño de un control activo de vibraciones de una viga flexible esbelta mediante realimentación proporcional de aceleración. La evaluación de desempeño de este control activo se realizó en base a simulaciones numéricas.

En la Figura 1 se presenta un diagrama esquemático correspondiente a la vista superior de una viga flexible de sección rectangular constante con un ancho de 5.1 mm y una altura de 51.4 mm . La longitud de la viga es de $L = 2000\text{ mm}$, su densidad es $7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y un módulo de elasticidad de 200 GPa . Como puede observarse, uno de los extremos de esta viga se encuentra empotrado sobre una masa $m_m = 200\text{ kg}$ que presenta una traslación en la dirección \hat{e}_Y , mientras que el otro extremo es libre. La viga, como también la masa, se encuentran sujetas a fuerzas externas. La fuerza $f_p(t)$, es una fuerza de perturbación que actúa sobre el extremo libre de la viga. La fuerza $f_u(t)$, es la fuerza de control por la cual el control activo interactúa con la viga flexible. La fuerza $f_e(t)$, es una fuerza de restitución elástica proporcional a la traslación de la masa m_m , es decir $f_e(t) = -k_p p(t)$, donde $k_p = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y la fuerza $f_v(t) = -k_v \dot{p}(t)$, donde $k_v = 3760 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, es una fuerza de disipación. La magnitud $p(t)$ es el desplazamiento de la masa m_m con respecto al marco de referencia inercial XY (\hat{e}_X, \hat{e}_Y).

La magnitud $w(x, t)$, es el desplazamiento transversal de la viga con respecto al sistema de referencia no inercial xy (\hat{e}_x, \hat{e}_y) situado sobre la masa m_m .

La realimentación de aceleración se establece a partir de $n_s = 3$ acelerómetros (ideales) instalados sobre la longitud de la viga flexible y destinados a determinar la aceleración transversal de la viga con respecto al sistema de referencia inercial XY. Se dispuso de un conjunto de $n_p = 41$ posiciones candidatas para estos tres acelerómetros, repartidas de manera uniforme sobre la longitud de la viga. En función de estas posiciones candidatas y la cantidad de acelerómetros disponibles, el conjunto S de configuraciones posibles se constituye por $C_3(41) = 10660$ configuraciones.

El modelo matemático que describe la dinámica de esta estructura flexible (viga + masa) es un sistema de ecuaciones diferenciales similar al presentado en la Ecuación (1). La dinámica controlada en este caso de estudio es:

$$\begin{bmatrix} 2.20 & 1.58 & 0.88 \\ 1.58 & 1.00 & 0.00 \\ 0.88 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}(t) \\ \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3738.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.07 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 46.23 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1731.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = f_{ec}(t), \quad (15)$$

donde $f_{ec}(t)$:

$$f_{ec}(t) = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} f_u(t) + \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.97 \\ -0.98 \end{bmatrix} f_p(t), \quad (16)$$

y las variables $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son las componentes modales de desplazamiento transversal relativo de la viga con respecto al sistema xy. Estas componentes modales corresponden al primer y segundo modo de vibración transversal de la viga respectivamente. La

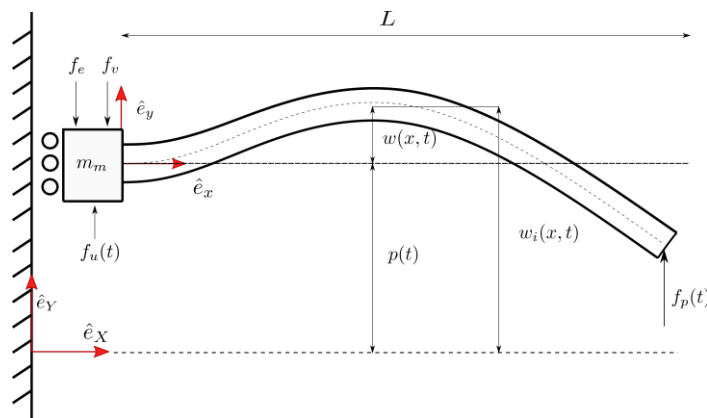


Figura 1. Esquema de Viga flexible esbelta. Vista superior.

fuerza $f_u(t)$, es la fuerza de control y $f_p(t)$ representa la fuerza de perturbación aplicada sobre el extremo libre de la viga.

El desplazamiento transversal con respecto a XY (dirección \widehat{e}_Y) del extremo libre de la viga se propone como señal de desempeño y la misma queda modelada de la siguiente manera:

$$z_L(t) = w(L, t) = p(t) + 0.97q_1(t) - 0.98q_2(t) \quad (17)$$

También se computa una segunda señal:

$$y_{ac}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{p}(t) \\ \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

la cual reúne la aceleración de la masa m_m en la dirección \widehat{e}_Y y las componentes modales de aceleración relativa a xy del primer y segundo modo de vibración de la viga.

A partir de la descripción de la señal $y_{ac}(t)$ las señales de los tres acelerómetros quedan definidas de la siguiente manera:

$$s(k, t) = P_c(k)y_{ac}(t) + d(t), \quad (19)$$

donde $s(k, t)$ agrupa las señales de los tres acelerómetros. La matriz:

$$P_c(k) = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1(r_1) & \phi_2(r_1) \\ 1 & \phi_1(r_2) & \phi_1(r_2) \\ 1 & \phi_1(r_3) & \phi_1(r_3) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

se conforma en parte con las magnitudes de los *mode-shape* $\phi_i(x)$ en las posiciones candidatas sobre la longitud de la viga $r_i \in [0, L]$ $i = 1, 2, 3$, definidas por

la k -ésima configuración en S. Por último, $d(t)$ reúne las componentes de ruido de cada uno de los tres acelerómetros.

3.1. Diseño del controlador

De acuerdo con la Ecuación (12), que modela la ley de control a partir de las señales de salida del filtro modal y en función de la señal de salida $y_{ac}(t)$ definida en la Ecuación (18) que modela la disponibilidad de las aceleraciones de la dinámica controlada de este caso de estudio, la única fuerza de control $f_u(t)$, ver Ecuación (16), presente en este caso de estudio queda determinada de la siguiente manera:

$$f_u(t) = -K_{sf}y_{ac}(t). \quad (21)$$

Por otro lado, a partir de la dinámica controlada presentada en las Ecuaciones (15), (16), (17) y (18), se procedió a computar la función transferencia desde la perturbación hacia el extremo libre de la viga $G_{zLf_p}(s)$ a lazo abierto y a lazo cerrado a partir de la realimentación emergente a partir de la Ecuación (21). La respuesta en frecuencia de dicha función transferencia a lazo abierto es presentada en la Figura 2, y como se puede observar la respuesta del extremo libre a la fuerza de perturbación es preponderante a una frecuencia de excitación cercana a 1 Hz. El pico que se observa a dicha frecuencia no es mas que el pico de resonancia asociado al primer modo de vibración transversal de la viga modelado en la dinámica controlada. Atendiendo a esta observación se decidió modificar la respuesta de este primer modo de vibración mediante la realimentación de su propia componente de aceleración $\ddot{q}_1(t)$. Esto implica que la matriz de ganancias de realimentación K_{sf} , ver Ecuación (21), quede estructurada y parametrizada

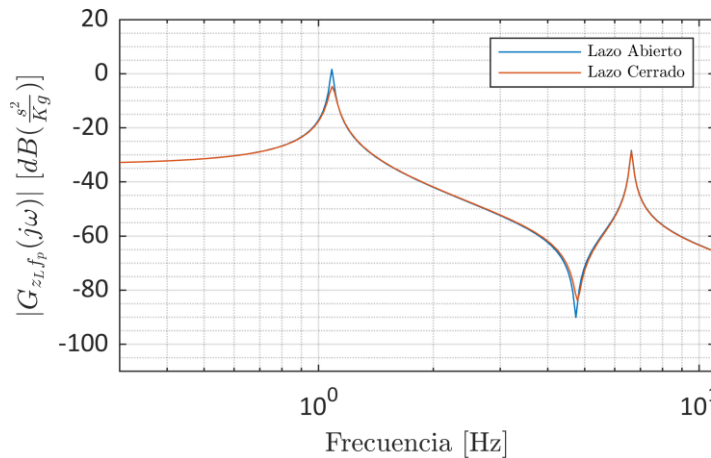


Figura 2. Módulo de respuesta en frecuencia $|G_{zLf_p}(j\omega)|$ constituida a partir de la dinámica controlada descrita en las Ecuaciones (16), (17) y (18) a lazo abierto (azul) y a lazo cerrado (naranja) por realimentación modal del primer modo de vibración propuesta, ver Ecuación 22, con una ganancia $\alpha = 7$ kg.

por un único parámetro de ganancia α de la siguiente manera:

$$K_{sf} = \alpha[0 \quad 1 \quad 0]. \quad (22)$$

En la Figura 2 también se presenta la respuesta en frecuencia $G_{z_L f_p}(j\omega)$, correspondiente a la dinámica controlada a lazo cerrado estable con el parámetro α sintonizado en $\alpha = 7$ kg. En dicha figura, la magnitud del pico de resonancia presente a los 1.08 Hz se ve atenuado en 6 dB producto de la realimentación establecida por el controlador la cual se considera satisfactoria. Esta respuesta a lazo cerrado se considera satisfactoria ya que el principal objetivo de este caso de estudio es observar el impacto de la componente de ruido de los acelerómetros en el desempeño del controlador en función de la configuración de posición adoptada para los acelerómetros.

3.1.1. Posicionamiento de los acelerómetros

En lo que respecta al problema de selección de posición de los tres acelerómetros se procedió al diseño de un filtro modal para estimar las aceleraciones de la dinámica controlada de acuerdo con la metodología propuesta en [20]. Se procedió a determinar la matriz de ganancias del filtro Ω a partir de la Ecuación (11) y computar su respectivo factor $f_c(k)$, para cada una de las 10660 configuraciones que conforman el conjunto S.

Tabla 1. Configuraciones de posición para los tres acelerómetros

Conf.	$f_c(k)$	Posiciones [m]		
		r_1	r_2	r_3
I	2.47	0.00	1.25	2.00
II	24.70	0.15	1.95	2.00
III	247.24	1.35	1.90	2.00

En la Tabla 1 se presentan tres configuraciones de posición para los tres acelerómetros y su respectivo factor f_c . La primera configuración presentada en la Tabla 1, tiene el mínimo factor f_c sobre el conjunto de S de configuraciones.

La matriz de ganancias Ω asociada a este posicionamiento de los acelerómetros es:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.52 & 0.99 & 0.53 \\ -0.50 & 0.99 & -0.49 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

En función de esta matriz de ganancias Ω , la Ecuación (5) que modela la fuerza de control y la

parametrización de la matriz K_{sf} adoptada en este caso expuesta en la Ecuación (22), la única fuerza de control $f_u(t)$ queda en función de las señales de los tres acelerómetros de la siguiente manera:

$$f_u(t) = \alpha[1.52s_1(t) - 0.99s_2(t) - 0.53s_3(t)] \quad (24)$$

Las otras dos configuraciones fueron seleccionados en función de su factor f_c , uno y dos órdenes de magnitud mayor al factor f_c mínimo, con el objetivo de realizar un análisis comparativo en tanto al impacto de las componentes de ruido presentes en las señales de los acelerómetros.

3.1.2. Incidencia del ruido de los acelerómetros

Con el objetivo de evaluar el impacto del ruido de los acelerómetros se simularon la respuesta impulsiva de la señal de desempeño $z_L(t)$ y la fuerza de control $f_u(t)$ para la dinámica controlada a lazo cerrado con $\alpha = 7$, ver Figuras 3, 4, y 5. Para estas últimas simulaciones se consideró la existencia de una componente de ruido en los acelerómetros modelada como una señal estocástica con un ancho de banda de 100 Hz y un desvío estándar $\sigma = 0.02 \frac{m}{s^2}$.

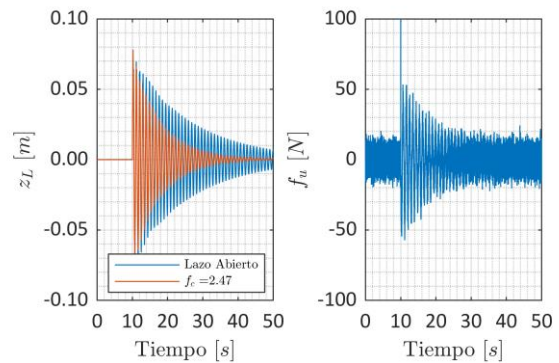


Figura 3. Desplazamiento transversal del extremo libre de la viga $z_L(t)$ y fuerza de control $f_u(t)$ ante una perturbación impulsiva $f_p(t)$ en base a la dinámica controlada de la estructura flexible con un control activo implementado a partir de la configuración I presentada en la Tabla 1 y el controlador sintonizado en $\alpha = 7$ kg.

3.2. Análisis y discusión de resultados

La disponibilidad de la estimación del vector aceleración $\hat{x}_c(t) = \Omega(k)s(k, t)$, por parte de la metodología propuesta, permitió de forma sencilla determinar la estructura de la matriz de ganancias de controlador en $K_{sf} = \alpha[0 \quad 1 \quad 0]$ de formar tal de

establecer una realimentación ponderada de la componente de aceleración del primer modo en base al parámetro α . En cambio, si no se hubiera introducido la factorización propuesta en la Ecuación 8, la determinación de la estructura de la matriz de ganancias $K_s = K_{sf}\Omega(k)$ sería dependiente de las posiciones de los acelerómetros aumentando considerablemente el volumen de cómputo requerido en la etapa de diseño.

En lo que respecta a las posiciones de los acelerómetros, estos resultan preponderantes en la interacción de su componente ruido con la dinámica de la estructura flexible y su impacto negativo en el desempeño del controlador.

Esto puede observarse en la evolución temporal de la señal de desempeño $z_L(t)$ y la fuerza de control $f_u(t)$. En la Figura 3, se observa la señal $z_L(t)$ de la dinámica controlada a lazo abierto (azul) y dinámica a lazo cerrado (rojo) con el controlador sintonizado en $\alpha = 7$ kg y las posiciones de los tres acelerómetros de acuerdo con la configuración I presentada en la Tabla 1. Esta configuración I tiene el menor factor f_c sobre el conjunto S de configuraciones candidatas. Como se puede observar, el desplazamiento transversal del extremo libre de la viga presenta una mejora sustancial en su amortiguamiento y una imperceptible oscilación residual producto del ruido. La fuerza de control $f_u(t)$ presenta una componente de ruido con valores máximos en torno a los 35 N de fuerza.

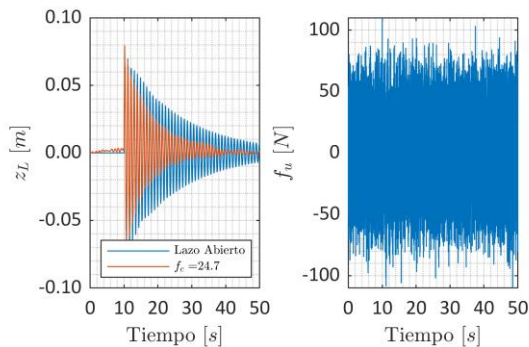


Figura 4. Desplazamiento transversal del extremo libre de la viga $z_L(t)$ y fuerza de control base a la dinámica controlada de la estructura flexible con un control activo implementado a partir de la configuración II presentada en la Tabla 1 y el controlador sintonizado en $\alpha = 7$ kg.

Al modificar las posiciones de los acelerómetros, adoptando la configuración II presentada en la Tabla 1, lo que se observa es un leve aumento de las oscilaciones residuales en el extremo libre y un

aumento sustancial de la componente de ruido en la acción de control $f_u(t)$, tal como se presenta en la Figura 4.

Al modificar por segunda vez las posiciones de los acelerómetros, adoptando la configuración III presentada en la Tabla 1, lo que se observa es una presencia significativa de oscilaciones residuales en el extremo libre de la viga, tal como se puede observar en la Figura 5. Estas oscilaciones se encuentran en el

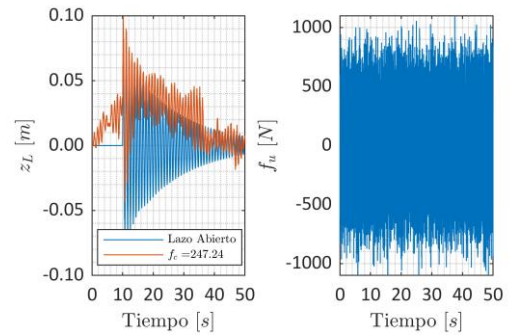


Figura 5. Desplazamiento transversal del extremo libre $z_L(t)$ y fuerza de control $f_u(t)$ ante una perturbación impulsiva $f_p(t)$ en base a la dinámica controlada de la estructura flexible con un control activo implementado a partir de la configuración III presentada en la Tabla 1 y el controlador sintonizado en $\alpha = 7$ kg.

orden los centímetros, presentando desviaciones de hasta 5 cm. La componente de ruido en la acción de control también sufre un aumento sustancial de aproximadamente un orden de magnitud.

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó una nueva metodología para abordar el diseño de un control activo de vibraciones a partir de una realimentación proporcional de aceleración, considerando a las posiciones de los acelerómetros como parámetros de diseño de dicho control activo.

La utilización de un filtro modal con el objetivo de estimar determinadas componentes de aceleración de la dinámica permite desacoplar el problema de posicionamiento de los acelerómetros del problema de establecimiento de la dinámica deseada a lazo cerrado. Esto reduce drásticamente el volumen de cómputo en la etapa de diseño.

Además, el criterio de posicionamiento de los acelerómetros, basado en la minimización de las

ganancias del filtro modal en base a la medida denominada factor f_c , reduce el impacto de las componentes de ruido existentes en los acelerómetros en el desempeño del control activo de vibraciones.

5. Referencias

- [1] A. Preumont. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Solid Mechanics and Its Applications 96. Springer Netherlands, 2004. ISBN 978-1-4020-0496-4, 978-0-306-48422-3.
- [2] I. M. da Fonseca, D. A. Rade, L. C. Goes, and T. de Paula Sales. Attitude and vibration control of a satellite containing flexible solar arrays by using reaction wheels, and piezoelectric transducers as sensors and actuators. *Acta Astronautica*, 139:357–366, 2017.
- [3] D. Meng, X. Wang, W. Xu, and B. Liang. Space robots with flexible appendages: dynamic modeling, coupling measurement, and vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 396:30–50, 2017.
- [4] T. Sales, D. Rade, and L. De Souza. Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers. *Aerospace Science and Technology*, 29(1):403–412, 2013.
- [5] M. H. Hansen. Aeroelastic instability problems for wind turbines. *Wind Energy*, 10(6):551–577, 2007.
- [6] F. Caputo, A. De Luca, A. Greco, S. Maietta, and M. Bellucci. Fe simulation of a shm system for a large radio-telescope. *Int. Rev. Model. Simul*, 11:5–14, 2018.
- [7] J. J. Langenakens, L. Clijmans, H. Ramon, and J. De Baerdemaeker. The effects of vertical sprayer boom movements on the uniformity of spray distribution. *Journal of agricultural engineering research*, 74(3):281–291, 1999.
- [8] D. Ooms, F. Lebeau, R. Ruter, and M.-F. Destain. Measurements of the horizontal sprayer boom movements by sensor data fusion. *Computers and Electronics in Agriculture*, 33(2):139–162, 2002.
- [9] C. Sinfort. Comparison between measurements and predictions of spray pattern from a moving boom sprayer. *Aspects of Applied Biology* (United Kingdom), 1997.
- [10] J. Cheer and S. J. Elliott. Multichannel control systems for the attenuation of interior road noise in vehicles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60: 753–769, 2015.
- [11] S. Elliott. Active noise and vibration control in vehicles. In *Vehicle Noise and Vibration Refinement*, pages 235–251. Elsevier, 2010.
- [12] S. Dyke, B. Spencer Jr, P. Quast, D. Kaspari Jr, and M. Sain. Implementation of an active mass driver using acceleration feedback control. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 11(5):305–323, 1996.
- [13] J.N. Juang and M. Phan. Robust controller designs for secondorder dynamic systems -a virtual passive approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15(5):1192–1198, 1992.
- [14] S. N. Mahmoodi, M. J. Craft, S. C. Southward, and M. Ahmadian. Active vibration control using optimized modified acceleration feedback with adaptive line enhancer for frequency tracking. *Journal of Sound and Vibration*, 330(7):1300–1311, 2011.
- [15] M. Balas. Feedback control of flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(4):673–679, 1978.
- [16] D. Halim and S. R. Moheimani. An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate. *Mechatronics*, 13(1):27–47, 2003.
- [17] I. Bruant and L. Proslier. Optimal location of actuators and sensors in active vibration control. *Journal of intelligent material systems and structures*, 16(3):197–206, 2005.
- [18] I. Bruant, L. Gallimard, and S. Nikoukar. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm. *Journal of sound and vibration*, 329(10):1615–1635, 2010.
- [19] Ambrosio, F. Resta, and F. Ripamonti. An H2 norm approach for the actuator and sensor placement in vibration control of a smart structure. *Smart Materials and Structures*, 21(12):125016, 2012.
- [20] Federico R. Masch, Rogelio L. Hecker, Flavio Capraro, Modal filter design reducing the impact of sensors noise on the filter outputs, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 156, 2021.