

Efecto del flujo rotacional sobre un cuerpo cilíndrico dispuesto en una celda de Taylor-Couette horizontal: Comparativa entre simulaciones numéricas y Anemometría Laser Doppler

Nicolás Molina Godoy¹, Rodrigo Hernández Pellicer¹

¹Laboratorio de Estudios de Fenómenos no Lineales LEAF-NL, Universidad de Chile, Chile. Email: rohernan@ing.uchile.cl

Resumen

El siguiente artículo analiza los regímenes de movimiento de un cilindro hueco, que se encuentra libre para moverse en el interior de un tambor lleno de agua que rota alrededor de su eje horizontal con velocidad variable. Utilizando algoritmos de análisis de imágenes, se encuentran las posiciones de equilibrio que experimenta el cuerpo al variar la velocidad de rotación del tambor. Considerando el régimen de suspensión hidrodinámica, se miden los campos de velocidad utilizando anemometría Doppler junto al cálculo de campos de velocidad utilizando simulaciones numéricas CFD (Ansys Fluent y OpenFoam). Se verifica que la velocidad al interior del cilindro al encontrarse suspendido es nula. A su vez, las fuerzas de arrastre y sustentación permiten compensar los efectos gravitatorios sobre el cilindro y permitir un balance de fuerzas nulo.

Palabras clave: Flujo Taylor-Couette horizontal, Vórtices, Flujo Rotacional, Anemometría Láser Doppler.

Abstract

The following article analyzes the motion regimes of a hollow cylinder, which is free to move inside a drum filled with water rotating around its horizontal axis at variable speed. Using image analysis algorithms, the equilibrium positions experienced by the body are determined as the drum rotation speed varies. Considering the hydrodynamic suspension regime, velocity fields are measured using Doppler anemometry, alongside calculating velocity fields using CFD numerical simulations (Ansys Fluent and OpenFoam). It is verified that the velocity inside the suspended cylinder is zero. Additionally, drag and lift forces compensate for gravitational effects on the cylinder, allowing for a null force balance.

Keywords: Horizontal Taylor-Couette flow, Vortex, Rotational Flow, Laser Doppler Anemometry.

1. Introducción

La dinámica del flujo rotacional ha sido objeto de estudios previos, mostrando ser un área de interés en la mecánica de fluidos. Por ejemplo, un estudio investigó las ondas formadas en la superficie libre al girar un cilindro exterior [1], mientras que otro examinó las inestabilidades y estelas de vórtices al introducir un cuerpo sólido dentro de un cilindro en rotación, buscando determinar la posición de equilibrio y la velocidad angular del cilindro sólido [2]. En el ámbito de la ingeniería mecánica aplicada, [3,4] desarrolló un modelo matemático de un sistema de rodamiento flexible, analizando las fuerzas hidrodinámicas sobre el rotor y evaluando la estabilidad del sistema.

En términos de la interacción del fluido con un cuerpo, varios autores han investigado la hidrodinámica del

flujo resultante. Por ejemplo, [5] examinó las fuerzas de arrastre y sustentación de un cilindro en contrarotación dentro de un flujo rotacional, mientras que otros estudios analizaron la suspensión de un cuerpo debido a la interacción superficie-fluido utilizando teoría de lubricación [6-8]. En este trabajo, se determinarán las posiciones de equilibrio del cilindro interior al variar la frecuencia de rotación del tambor, además de caracterizar los regímenes que se producen en su interior mediante simulaciones numéricas durante el fenómeno de suspensión hidrodinámica validadas mediante mediciones experimentales de velocidad.

2. Metodología

2.1. Montaje experimental

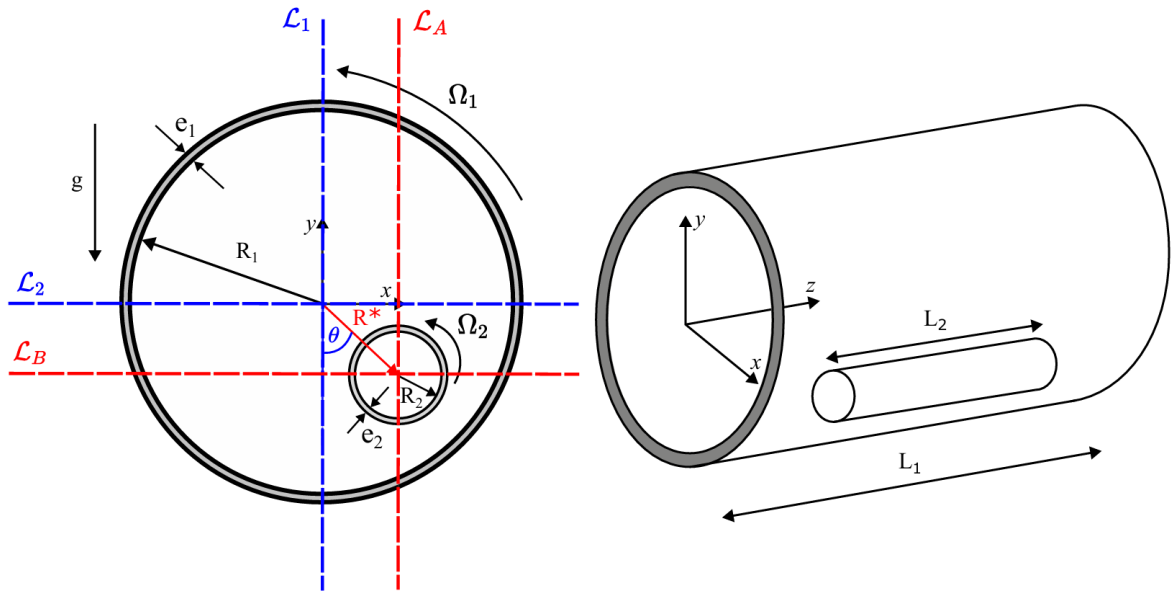


Figura 1. Esquema del montaje experimental, donde se indican las dimensiones del equipo, posición de equilibrio compuesta por: Distancia al centro (R^*) e inclinación respecto a una vertical que pasa por el centro (θ)

Los experimentos se llevan a cabo en una celda tipo Taylor-Couette dispuesta horizontalmente, previamente estudiada por [9] tal como se muestra en la figura 1. Esta celda consta de un cilindro de plexiglás (llamado drum o tambor) con un radio interior R_1 de 31 mm, un espesor e_1 de 4 mm y una longitud L_1 de 183 mm, lleno de agua desionizada y sin gas. El drum gira debido al contacto con un sistema de rodillos impulsado por un motor DC conectado directamente al eje de uno de los rodillos y controlado mediante una fuente de poder. En el interior del drum se encuentra un cilindro hueco horizontal de plexiglás con un radio R_2 de 6.5 mm, un espesor e_2 de 3 mm y una longitud L_2 de 149 mm.

El parámetro externo que controla la dinámica dentro del cilindro es la velocidad angular Ω_1 , controlada por el voltaje aplicado al motor DC, variando entre 3 V y 9 V. Las posiciones del cilindro se registran utilizando una cámara digital que graba a 240 cuadros por segundo con una resolución de 1920x1080 px o a 60 cuadros por segundo con una resolución de 4096x2160 px. Se utiliza un sistema de medición LDA de dos componentes DANTEC DYNAMICS para medir los campos de velocidad, con longitudes de onda de 532 nm y 561 nm y hasta 150 mW de potencia, utilizando partículas trazadoras de poliamida de 5 μ m de diámetro de la marca DANTEC DYNAMICS

2.2. Posiciones de equilibrio

Para determinar la posición relativa del cilindro al interior, se realiza una serie de filmaciones fijando durante un intervalo de tiempo una cierta velocidad de rotación, variando entre las 80 RPM hasta las 460

RPM. Las imágenes obtenidas son procesadas con el fin de obtener las distintas posiciones en las que se encuentra el cilindro interior durante la evolución del flujo. Para ello se utilizan los algoritmos *circle_hough* y *circle_houghpeaks* disponibles en *MATLAB*.

El algoritmo *circle_hough* permite determinar todos los círculos de un radio específico utilizando la transformada de Hough. Esta transformada se basa en convertir una imagen desde el plano cartesiano a coordenadas polares y asignar a cada punto en el espacio de imagen una curva sinusoidal en el espacio de Hough [10]. Por otro lado, el algoritmo *circle_houghpeaks* permite encontrar aquellos círculos que son más nítidos y que se ajustan de mejor manera al radio especificado. Esta función también determina el centro del círculo ajustado.

El algoritmo utiliza los píxeles de cada imagen, e identifica los puntos en ella. Para el caso de identificación de líneas, cada punto tiene un set de rectas que lo atraviesan y se calcula la distancia entre un punto de referencia a una de las rectas utilizando la ecuación (1).

$$r = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \quad (1)$$

De esta forma, cada punto contiene determina una curva sinusoidal en el plano (r, θ) que es única para dicho punto. Esta misma idea se puede extrapolar a la identificación de círculos, pero considerando la ecuación (2). En este caso, se tienen tres parámetros (a, b, r) en vez de dos.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2)$$

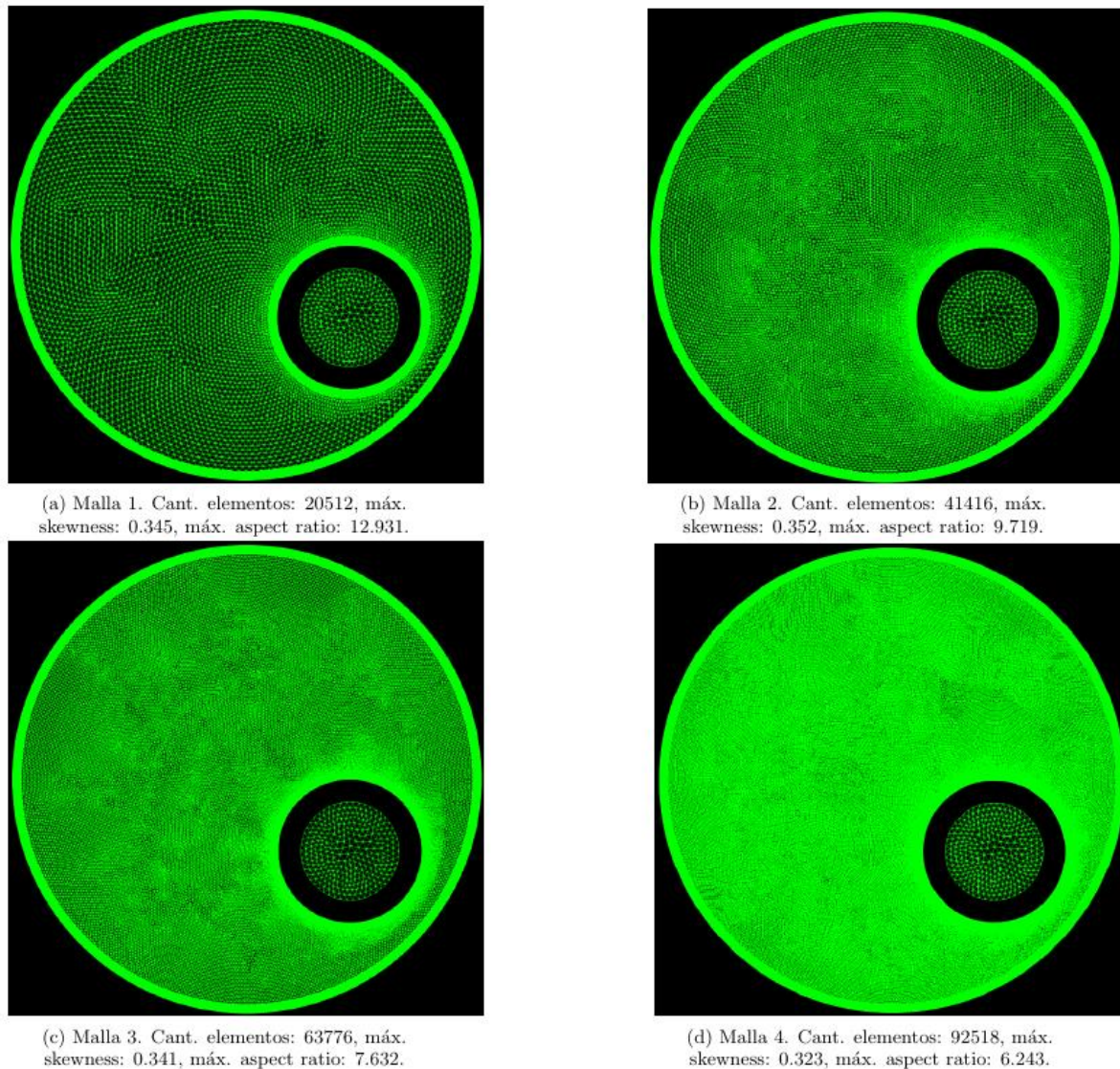


Figura 2. Mallas generadas para el desarrollo de las simulaciones en 2D junto a su cantidad de elementos y principales parámetros de calidad.

Para obtener las posiciones del cilindro interior, primero se ajusta un círculo de tamaño equivalente al drum al tomar una imagen de referencia. Luego, se itera sobre cada imagen y se ajusta un círculo que sea coincidente con el cilindro interior. Una vez obtenidos estos dos círculos, se calcula la distancia entre sus centros considerando como sistema de referencia, el centro del drum. Esto entrega la posición promedio del centro del cilindro para distintas velocidades de rotación del drum.

Una vez obtenidas todas las posiciones del cilindro a lo largo de la evolución del sistema, se debe determinar el rango de valores de Ω_1 el sistema se encuentra en suspensión hidrodinámica. Será bajo esta condición hidrodinámica que se obtendrán los perfiles de

velocidad tanto de manera numérica como de manera experimental.

2.3. Simulaciones numéricas

El desarrollo numérico se basa en las posiciones del cilindro interior y las velocidades en los bordes del tambor obtenidas experimentalmente para el régimen de suspensión hidrodinámica, que se utilizan como parámetros de entrada.

Para ello, se realiza una simulación numérica en dos dimensiones considerando cuatro mallas diferentes para la realización de la independencia de malla. El detalle de cada malla, junto a sus parámetros de calidad se muestran en la figura 2. En cada malla estudiada, se

calcula la circulación Γ alrededor de cilindro interior definida por:

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} (U\hat{i} + V\hat{j}) \cdot (-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j})Rd\theta \quad (3)$$

donde $R=10$ mm es la distancia radial medida desde el centro del cilindro interior.

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, se emplean dos algoritmos: icoFoam de OpenFoam y el algoritmo SIMPLE de Ansys Fluent. Ambos solucionadores utilizan condiciones de contorno de no deslizamiento para el cilindro interior (tanto el manto interior como exterior). Para el manto del tambor, se establece una de las velocidades de rotación que permiten el régimen de suspensión hidrodinámica encontrada experimentalmente.

El algoritmo icoFoam utiliza el método PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) al resolver las ecuaciones de continuidad y momentum, que están descritas en las ecuaciones (4) y (5).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p \quad (5)$$

Como esquema de discretización temporal, se utiliza el método de Crank-Nicholson de factor 0.9, que corresponde a un metodo de segundo orden y esta descrito por la ecuación (6) [11]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi - \phi^{00}}{2\Delta t} \quad (6)$$

Para validar las simulaciones numéricas se comparan ambos resultados, numéricos y experimentales, considerando las rectas L_1 , L_2 , L_A y L_B en las posiciones axiales mostradas en la figura 1.

Para estudiar la influencia de las condiciones de borde impuestas sobre el campo de velocidades al interior de la celda, se calcula el número de Rossby utilizando los resultados numéricos. Este número se define según la ecuación (7) [9].

$$Ro = \frac{U^2/l}{2\pi\Omega_1 R_1} \quad (7)$$

donde la velocidad U es la magnitud de la velocidad calculada en un punto, y el termino $2\pi\Omega_1 R_1$ representa la importancia del efecto Coriolis sobre el movimiento del cuerpo interior.

Así, una vez validados los resultados numéricos estos pueden ser utilizados para explorar la dinámica del fenómeno de suspensión hidrodinámica.

2.4. Mediciones experimentales

Para determinar los perfiles de velocidades bajo la condición de suspensión hidrodinámica, se utiliza un sistema de medición LDA que permite medir los campos de velocidad horizontal y vertical (U y V respectivamente). En el sistema LDA se miden los campos de velocidad a lo largo de las rectas L_1 , L_2 , L_A y L_B (Figura 1) en una posición fija en el eje axial con respecto a la cara frontal del drum (2 cm). En una medición, las líneas horizontales y verticales atraviesan el centro del drum mientras que en otra atraviesa el centro del cilindro hueco.

Como mecanismo de posicionamiento de las mediciones, el equipo LDA cuenta con un sistema de movimiento *traverse* que permite el desplazamiento en las 3 direcciones. De este modo, los desplazamientos máximos en los ejes X, Y, Z son 610 mm, 410 mm y 1010 mm respectivamente. Además, todos los ejes se pueden desplazar a una velocidad máxima de 25 mm/s.

Para asignar los puntos de medición, se debe elaborar una malla de puntos asignando un punto inicial del recorrido junto a su desplazamiento en los ejes X, Y, Z. En los puntos de medición, se puede medir una cantidad de tiempo fija o esperar a que el equipo detecte un numero de partículas.

3. Resultados

A continuación, se exponen los resultados obtenidos tanto a nivel numérico como experimental. Inicialmente, se determina la posición de equilibrio promedio del cilindro mediante pruebas experimentales. Se muestran los resultados al realizar el análisis de sensibilidad de malla. Finalmente, se lleva a cabo una comparación entre los resultados experimentales y los resultados numéricos.

3.1. Posiciones de equilibrio

Para obtener las posiciones de equilibrio deseadas ($\Omega_2 = 0$ para que el cilindro interior no se desplace ni rote) se varía la velocidad de rotación Ω_1 en un rango que el cilindro se mantenga suspendido al interior del drum. Estos resultados se muestran en la figura 3 y figura 4.

En la figura 3, se observa una disminución en la distancia medida desde el centro en función del tiempo, acompañada de oscilaciones. Las líneas rojas indican periodos en los que la velocidad de rotación del cilindro exterior se mantuvo constante. Este patrón oscilatorio también se refleja en la posición angular del cilindro interior. Las mayores oscilaciones ocurren durante la transición entre una velocidad de rotación $\Omega_2 > 0$ y $\Omega_2 = 0$, que corresponde a los cambios entre estados de equilibrio del sistema.

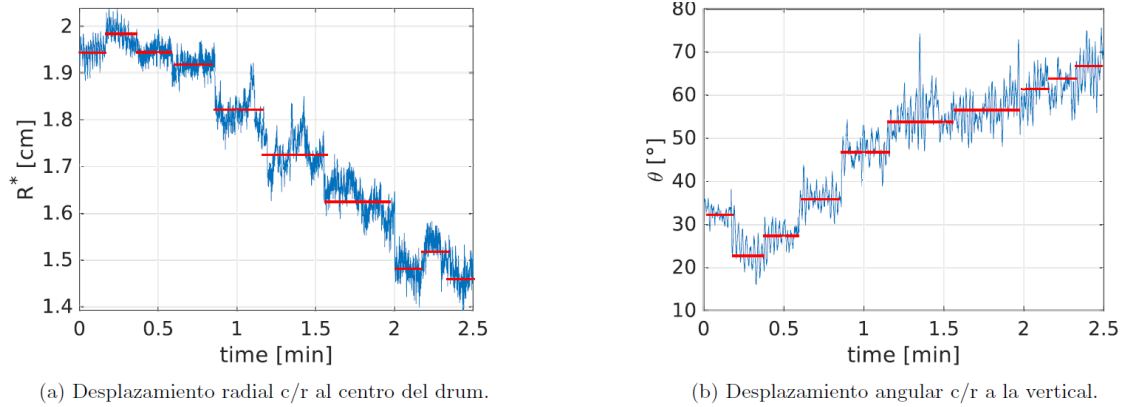


Figura 3. Serie temporal de la posición del centro del cilindro en coordenadas polares al ir variando la velocidad de rotación del drum.

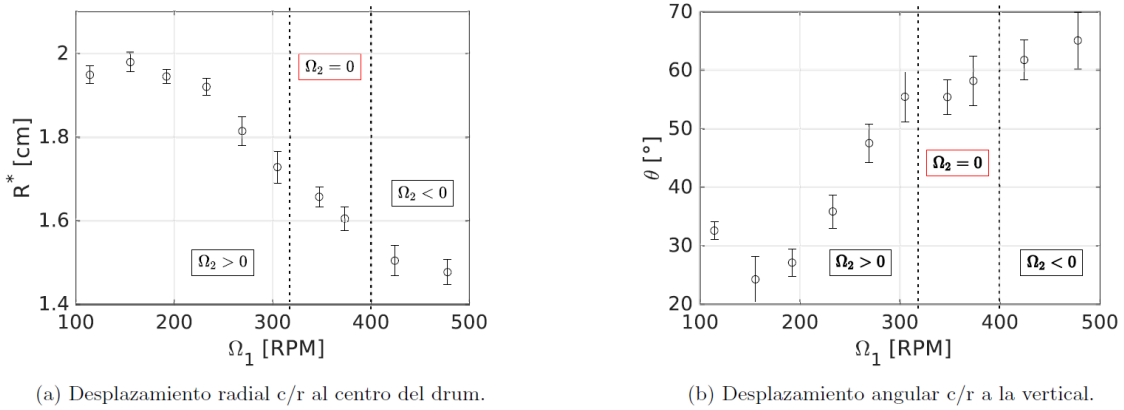


Figura 4. Promedio temporal de las posiciones de equilibrio del cilindro al ir variando la velocidad de rotación del drum.

En la figura 4, se examinan los promedios de la distancia y la posición angular con respecto al centro. La desviación estándar de estos datos refleja que los cálculos de las posiciones en estado de equilibrio utilizando valores promedio son representativos del régimen estudiado. Específicamente, el régimen de suspensión hidrodinámica se representa adecuadamente.

En cuanto al flujo alrededor del cilindro, a medida que aumenta la velocidad angular Ω_1 , tanto la fuerza de sustentación como el arrastre aumentan, lo que provoca que el cilindro comience a ascender. Esta última fuerza también es la responsable de hacer que el cilindro interior gire, al principio del movimiento, en el mismo sentido que la velocidad angular Ω_1 .

3.2. Campos cinemáticos y dinámicos numéricos

En las figuras 5, 6, 7 y 8 se muestran gráficos para la vorticidad, líneas de corriente y perfiles de velocidad numéricos para las distintas mallas 2D que se utilizaron. Al analizar las últimas dos figuras, se observa que la circulación alrededor del cilindro interior converge al valor $\Gamma = 0.011$. Todas las mallas

empleadas muestran regiones de vórtices claramente definidos en la zona izquierda del cilindro interior.

En la figura 9 se muestra el número de Rossby calculado para todas las mallas utilizadas. Se puede observar que la influencia de las condiciones de borde en la zona del gap mostradas por los perfiles de velocidad obtenidos mediante las rectas L_A , L_B , L_1 y L_2 se limita a regiones acotadas y concuerda con los observado en las velocidades (U, V) ya que estas presentaban una región lineal en cierta zona, pero el resto de la dinámica estaría gobernada por la influencia del cilindro interior.

3.3. Comparación resultados numéricos y experimentales

En las figuras 10, 11, 12 y 13 se muestran los perfiles de velocidad experimentales, junto a los perfiles de velocidad calculados mediante CFD para las distintas rectas de medición.

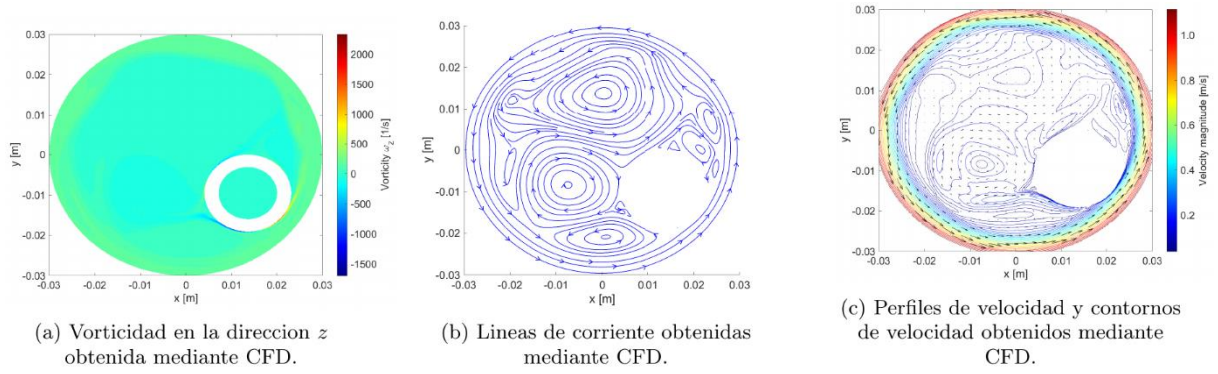


Figura 5. Vorticidad, líneas de corriente y perfiles de velocidad junto a sus contornos para la malla 1 en el caso 2D. La circulación alrededor del cilindro es $\Gamma_1 = 0.014$.

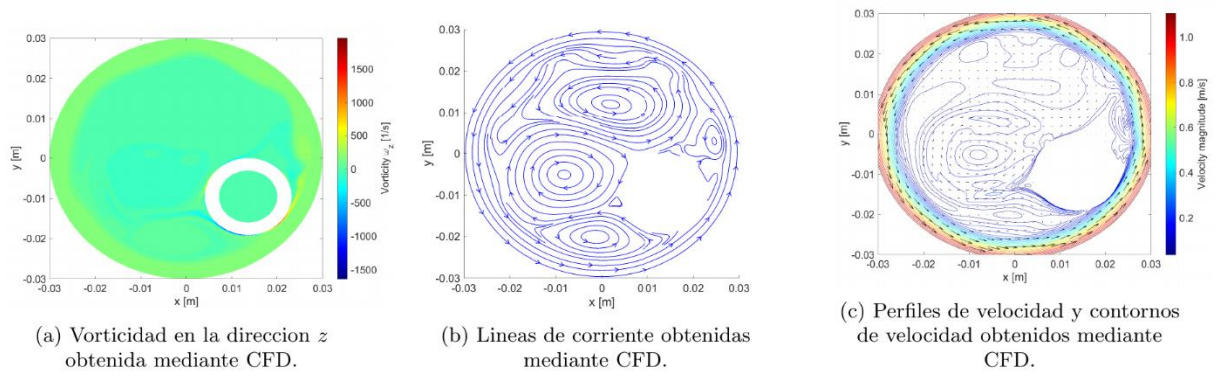


Figura 6. Vorticidad, líneas de corriente y perfiles de velocidad junto a sus contornos para la malla 2 en el caso 2D. La circulación alrededor del cilindro es $\Gamma_2 = 0.013$.

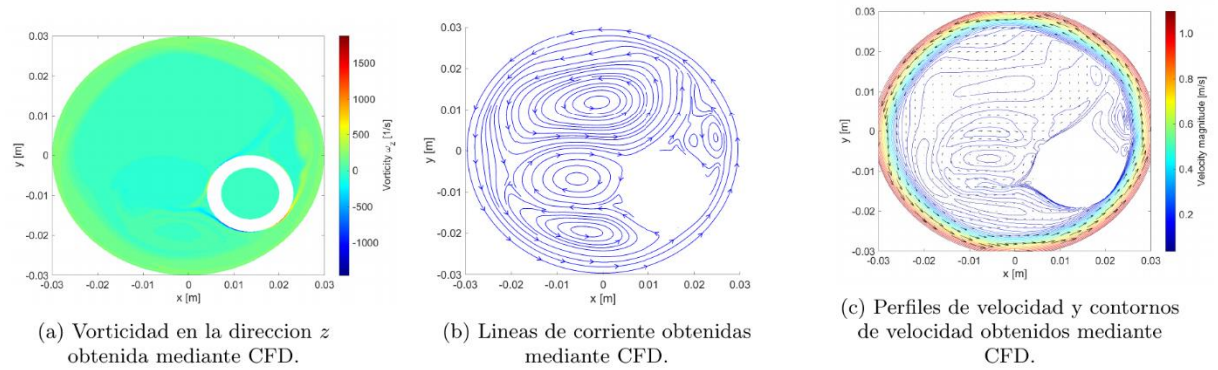


Figura 7. Vorticidad, líneas de corriente y perfiles de velocidad junto a sus contornos para la malla 3 en el caso 2D. La circulación alrededor del cilindro es $\Gamma_3 = 0.011$.

En la figura 10 se muestran los perfiles de velocidad (U, V) a lo largo de la recta L_B . Al analizar el perfil de velocidad U , podemos observar una ligera perturbación de los perfiles de velocidad de sólido rígido, principalmente en los bordes debido a que estamos en una región distinta al centro del cilindro exterior. Sin embargo, se produce una variación de este perfil en la zona exterior del cilindro interior, debido a efectos de capa límite en la zona.

Tendencia similar ocurre en el perfil de velocidad V , donde la desviación desde el perfil de sólido rígido es más notorio, ocurriendo solo perfiles con forma lineal cerca de los bordes del cilindro exterior, mientras que en regiones exteriores cercanas al cilindro interior la cinemática se rige por estructuras hidrodinámicas (vórtices) formados en esa zona.

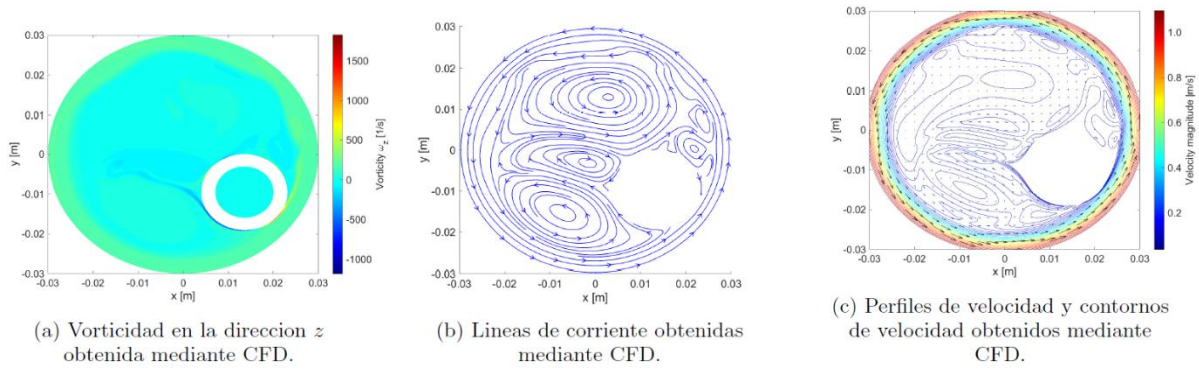


Figura 8. Vorticidad, líneas de corriente y perfiles de velocidad junto a sus contornos para la malla 4 en el caso 2D. La circulación alrededor del cilindro es $\Gamma_4 = 0.011$.

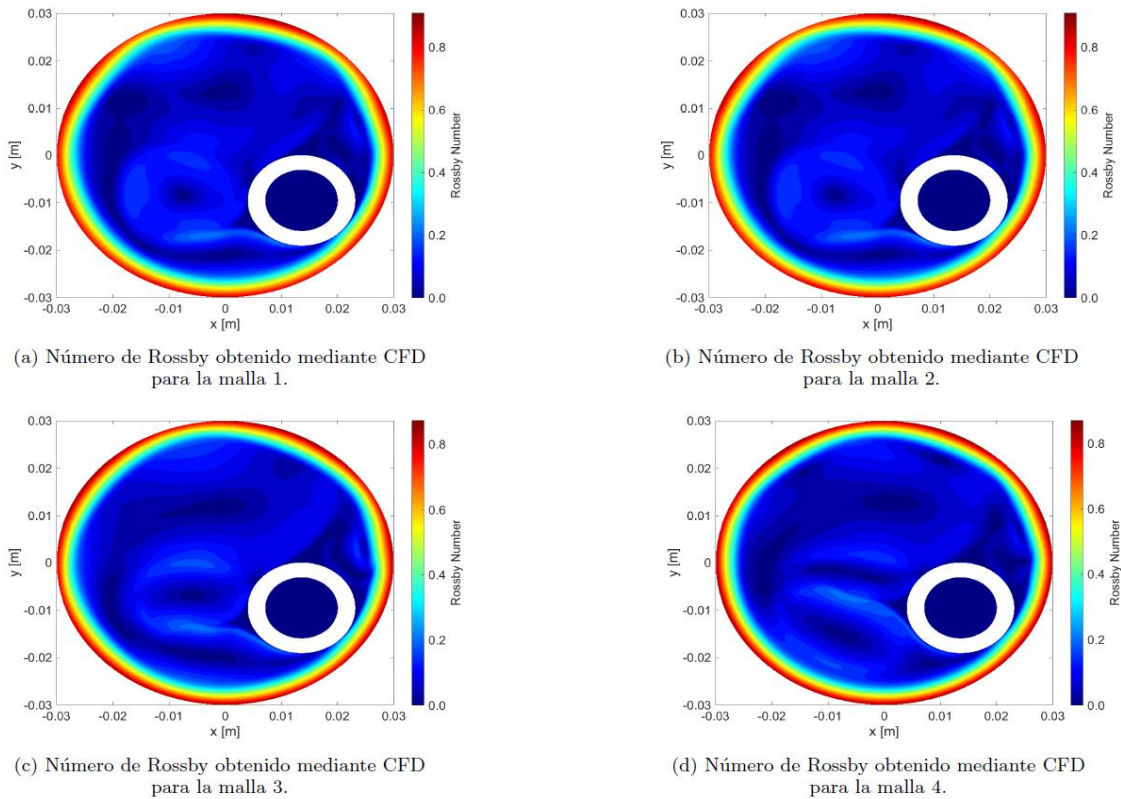


Figura 9. Número de Rossby obtenidos mediante CFD al analizar cada una de las mallas para el caso 2D.

Además, se observa que ambas velocidades, (U, V) , son nulas al interior del cilindro interior. Este resultado se muestra tanto experimentalmente como numéricamente.

En la figura 11 se muestran los perfiles de velocidad (U, V) a lo largo de la recta L_2 . En esta región, se espera que el perfil de sólido rígido sea prevalente debido a que el cilindro interior se encuentra alejado de la zona de medición. Esto se verifica para la velocidad U casi completamente a lo largo de la recta

L_2 excepto en las por donde se atraviesa el cilindro interior. Lo anterior es consecuencia de la influencia que tiene en el flujo el cuerpo al interior.

Algo similar ocurre con el perfil de velocidad V , donde cerca de la zona exterior del cilindro interior se produce un cambio notorio de velocidad en la zona izquierda, pero en la zona derecha el perfil sigue tendiendo a una forma lineal.

En la figura 12 se muestran los perfiles de velocidad a lo largo de la recta L_A . En esta región, se espera que los resultados de los perfiles estén invertidos, en el sentido

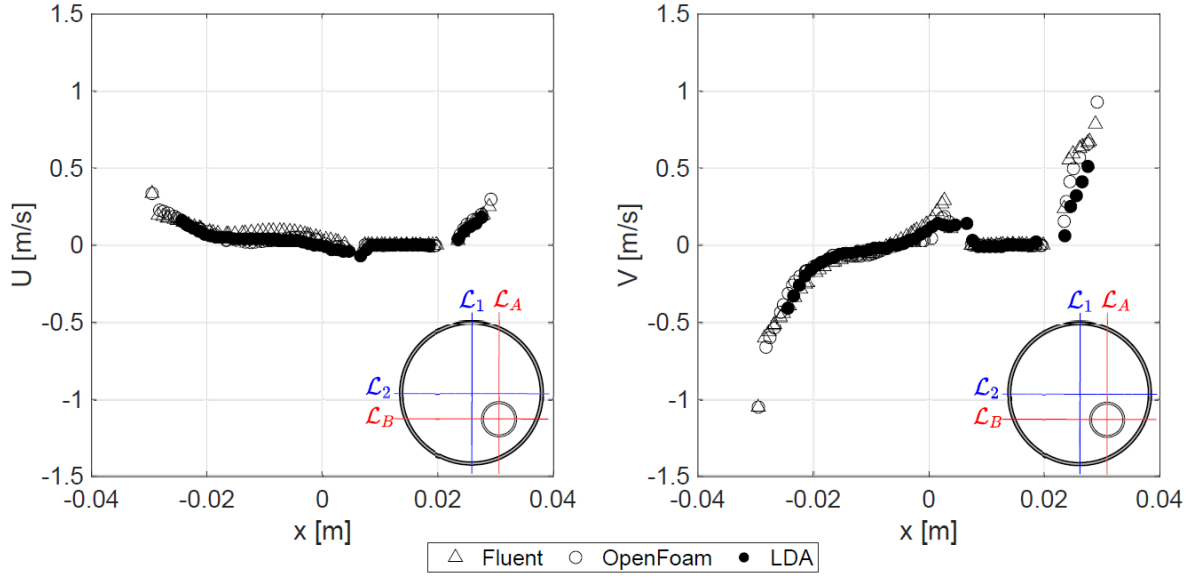


Figura 10. Comparación de velocidades (U,V) medidas y calculadas a lo largo de la recta L_B , bajo el régimen $\Omega_2 = 0$ ($\Omega_2 = 339.8$ RPM en sentido antihorario).

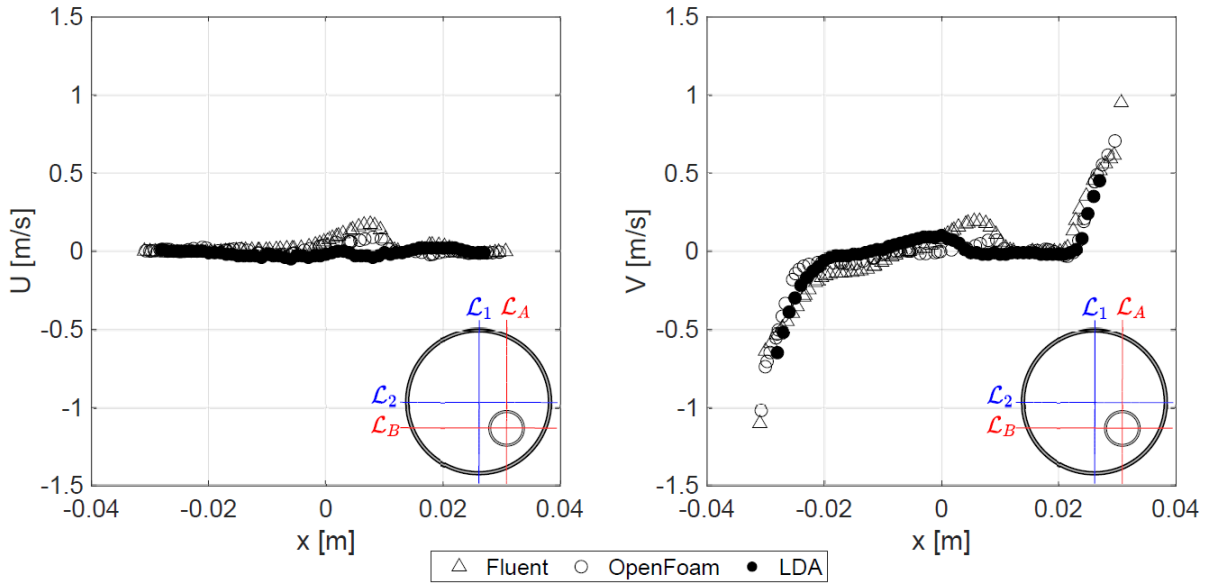


Figura 11. Comparación de velocidades (U,V) medidas y calculadas a lo largo de la recta L_2 , bajo el régimen $\Omega_2 = 0$ ($\Omega_2 = 339.8$ RPM en sentido antihorario).

que la rotación de sólido rígido debería dominar en la velocidad V y no en la velocidad U . Al igual que los perfiles de velocidad a lo largo de las rectas horizontales, al interior del cilindro la velocidad es nula, y se producen gradientes de velocidad en las zonas adyacentes del cuerpo. En la zona del gap inferior se produce un perfil de velocidad U lineal, pero en las zonas superiores el perfil de velocidad U comienza a aumentar, pero a medida que se acerca hacia las paredes del drum la velocidad disminuye de

manera lineal, aproximándose al valor impuesto por las condiciones de borde.

Por su parte, el perfil de velocidad V muestra un perfil lineal en la zona del gap inferior, mientras que en la parte superior tiende a mantener un valor nulo, hasta aproximarse a los bordes donde empieza a dominar la condición de borde impuesta.

En la figura 13 se muestran los perfiles de velocidad a lo largo de la recta L_1 que atraviesa el centro

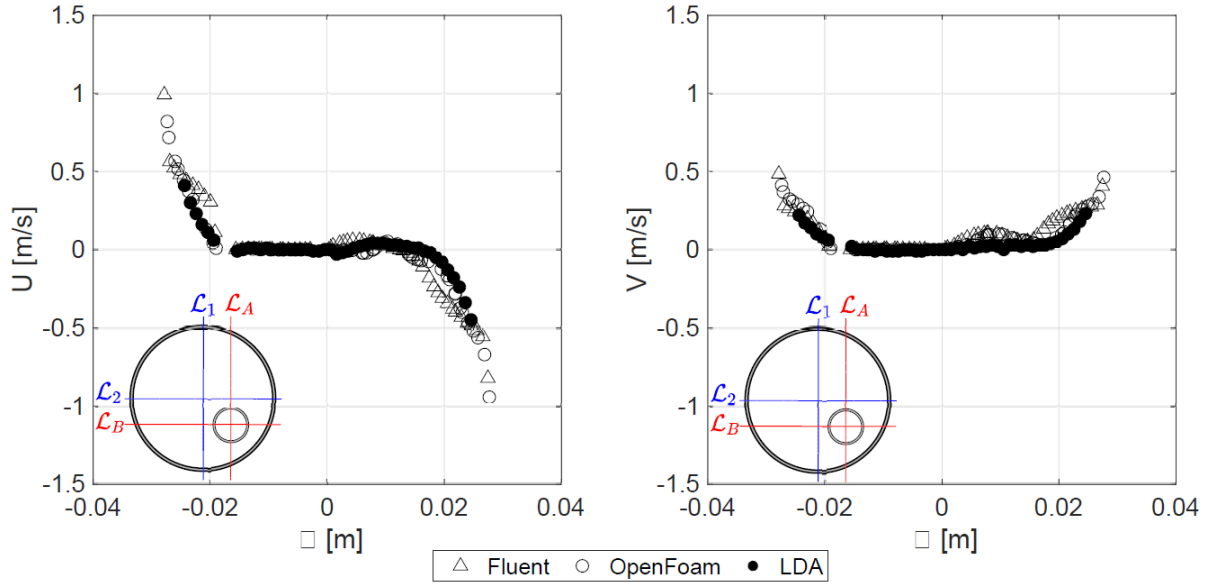


Figura 12. Comparación de velocidades (U,V) medidas y calculadas a lo largo de la recta L_A , bajo el régimen $\Omega_2 = 0$ ($\Omega_2 = 339.8$ RPM en sentido antihorario).

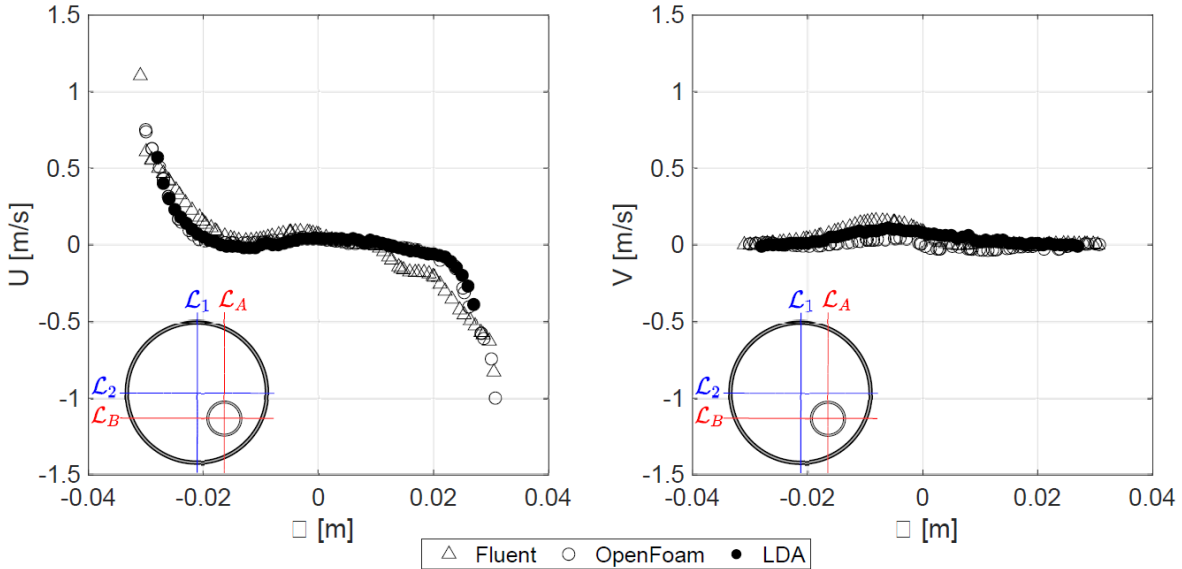


Figura 13. Comparación de velocidades (U,V) medidas y calculadas a lo largo de la recta L_1 , bajo el régimen $\Omega_2 = 0$ ($\Omega_2 = 339.8$ RPM en sentido antihorario).

geométrico del tambor. Se observa un perfil de velocidad V similar al de rotación de un cuerpo rígido, confirmando lo esperado. Sin embargo, cerca del cilindro interior, se detecta una velocidad positiva de baja magnitud debido al impacto del fluido, haciendo que el flujo ascienda en esa área. Este efecto se refleja en el perfil de velocidad U , donde esta zona muestra un valor cercano a cero. Este comportamiento es consistente con observaciones previas, donde los perfiles de velocidad tienden a ser predominantemente lineales cerca de los bordes [5,9].

En la figura 14 se ilustra de manera más clara la concordancia entre los perfiles de velocidad experimentales y numéricos, especialmente al analizar el gap generado entre el cilindro y el drum. Al observar el perfil experimental, se puede inferir la presencia de un vórtice en la zona superior izquierda.

En ambos casos, los perfiles de velocidad indican que, en la región interior del cilindro, los valores de U y V serían nulos, y cualquier valor que se muestre estaría asociado a errores numéricos.

4. Conclusiones

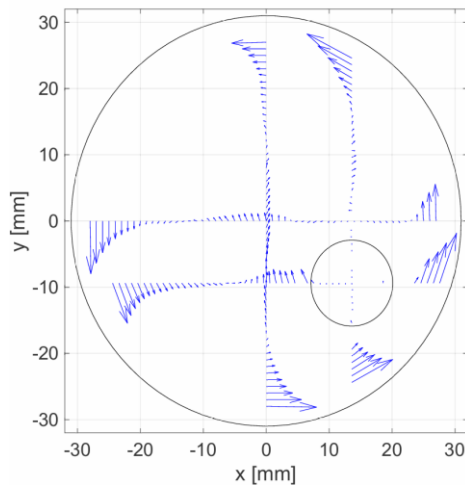


Figura 12. Perfiles de velocidad experimentales a lo largo de las rectas L_1 , L_2 , L_A y L_B

Este estudio analiza los regímenes hidrodinámicos experimentados por un cilindro dentro de una celda de Taylor-Couette rotatoria. Se determina la evolución de la posición del cilindro con diferentes regímenes y las condiciones cinemáticas necesarias para la suspensión hidrodinámica.

Los resultados numéricos son comparados con los experimentales, mostrando discrepancias en la forma y dirección de los vórtices. Esto se atribuye a la simplificación 2D que no considera los efectos tridimensionales del flujo.

Para mejorar la precisión en áreas específicas, se sugiere realizar análisis numéricos más detallados utilizando mallas tridimensionales. Esto permitirá una representación más fiel de las complejas estructuras dinámicas presentes en el sistema.

Se confirma que en la suspensión hidrodinámica, la velocidad dentro del cilindro es nula, manteniendo el cilindro en posición fija debido a la anulación de momentos generados por fuerzas opuestas.

El número adimensional de Rossby valida la influencia de las condiciones de borde en los perfiles de velocidad, mostrando características lineales cerca de las paredes y comportamientos hidrodinámicos complejos en otras partes de la celda.

Se concluye que la suspensión hidrodinámica es posible dentro de un rango específico de velocidades de rotación del tambor. Fuera de este rango, se pierde la simetría en los perfiles de velocidad entre puntos diametralmente opuestos del cilindro, lo que indica la presencia de otros fenómenos no considerados en este estudio y estudiados por otros autores [6-8].

5. Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por la beca de doctorado nacional ANID-PFCHA/Doctorado\Nacional/2020-21200878 y el fondo de investigación FONDEQUIP EQM190029.

6. Referencias

- [1] O. Phillips. "Centrifugal waves". *Journal of Fluid Mechanics*, vol 7, pp. 340-352, 1962.
- [2] H. Greenspan. "On a rotational flow disturbed by gravity". *Journal of Fluid Mechanics*, vol 74, pp. 335-351, 1976.
- [3] G. Wang, H. Yuan. "An analysis of dynamic stability for a flexible rotor filled with liquid". *Physics of Fluids*, vol 30, pp. 037101, 2018.
- [4] G. Wang, H. Yuan. "Stability analysis of a flexible rotor partially filled with two liquid phases". *Physics of Fluids*, vol 31, pp. 017103, 2019.
- [5] C. Sun, T. Mullin, L. Van Wijngaarden, D. Lohse. "Drag and lift forces on a counter-rotating cylinder in rotating flow". *Journal of Fluid Mechanics*, vol 664, pp. 150-173, 2010.
- [6] T. Mullin, H. Ockendon, J. Ockendon. "Levitation by thin viscous layers". *Journal of Fluid Mechanics*, vol 888, pp. A17, 2020.
- [7] J. Eggers, R. R. Kerswell, T. Mullin. "Balancing a cylinder on a thin vertical layer of viscous fluid". *Physical Review E*, vol 87, pp. 065001, 2013.
- [8] M. Dalwadi, R. Cimpeanu, H. Ockendon, J. Ockendon, T. Mullin. "Levitation of a cylinder by a thin viscous film". *Journal of Fluid Mechanics*, vol 917, pp. A28, 2021.
- [9] R.H. Hernández, A. Vial, C. Barraud. "Motion of a free cylinder inside rotating water-filled drum". *Physics of Fluids*, vol 27, pp. 083602, 2015.
- [10] Hany A. Elsalamony. "Chapter 30 – Detecting distorted and benign blood cells using the Hough transform based on neural networks and decision trees". *Emerging Trends in Image Processing, Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 457-473, 2015.
- [11] J. Crank and P. Nicolson. "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol 43, pp. 50-67, 1947.