

# Cálculo do coeficiente de arrasto em uma placa imersa em um gás rarefeito no regime de transição

Juan Felipe Cardoso-Elias<sup>1</sup>, Denize-Kalempa<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciências Básicas, Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Brasil. Email: juan.elias@usp.br

## Resumo

Este trabalho visa calcular numericamente o coeficiente de arrasto em uma placa imersa em um gás rarefeito no regime de transição, considerando um ângulo de ataque nulo e um número de Mach arbitrário. Utilizando o modelo cinético proposto por Shakhov para a equação de Boltzmann e o método de velocidades discretas. Como condição de contorno, o espalhamento difuso para as moléculas gasosas na superfície é assumido. O número de Knudsen ( $Kn$ ) é fundamental para caracterizar o grau de rarefação do gás, determinando quando o regime de moléculas livres, transição ou contínuo prevalece. Além do coeficiente de arrasto, são calculadas características macroscópicas do gás, como pressão e velocidade, em função de  $Kn$  e do número de Mach. Este estudo é relevante para diversas áreas, incluindo engenharia aeroespacial, tecnologia de vácuo e microsistemas eletrônicos, onde a compreensão dos fenômenos físicos em regimes rarefeitos é crucial para o desenvolvimento de novas tecnologias.

**Palavras-chave:** coeficiente de arrasto; gás rarefeito; regime de transição; espalhamento difuso.

## Abstract

This work aims to numerically calculate the drag coefficient on a plate immersed in a rarefied gas in the transition regime, considering a zero angle of attack and an arbitrary Mach number. Using the kinetic model proposed by Shakhov for the Boltzmann equation and the discrete velocity method. As a boundary condition, diffuse scattering for gas molecules on the surface is assumed. The Knudsen number ( $Kn$ ) is fundamental in characterizing the degree of gas rarefaction, determining when the free molecular, transition, or continuum regime prevails. In addition to the drag coefficient, macroscopic characteristics of the gas, such as pressure and velocity, are calculated as a function of  $Kn$  and the Mach number. This study is relevant to various fields, including aerospace engineering, vacuum technology, and microsystems electronics, where understanding physical phenomena in rarefied regimes is crucial for the development of new technologies.

**Keywords:** drag coefficient; rarefied gas; transitional regime; diffuse scattering.

## 1. Introdução

Na análise da dinâmica de gases rarefeitos, um parâmetro crucial para caracterizar a rarefação do gás é o número de Knudsen ( $Kn$ ), definido como a razão entre o caminho livre médio molecular e uma dimensão característica do sistema gasoso em estudo. Quando  $Kn \ll 1$  (regime contínuo), as equações da mecânica dos meios contínuos são válidas. No entanto, em situações onde  $Kn \gg 1$  (regime de moléculas livres) ou  $Kn \approx 1$  (regime de transição), métodos que consideram a natureza microscópica do gás se tornam necessários. Neste trabalho, calcula-se o coeficiente de arrasto em uma placa imersa em um gás rarefeito no regime de transição. Para essa análise, a equação de Boltzmann é utilizada devido à sua aplicabilidade em problemas de

escoamento de gases rarefeitos (CERCIGNANI, 1975). A equação de Boltzmann é uma equação integro-diferencial que descreve a evolução da função de distribuição de velocidades moleculares, permitindo o cálculo de grandezas macroscópicas do gás, como pressão, temperatura e velocidade.

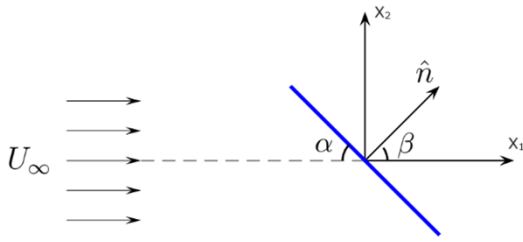
Embora a solução da equação de Boltzmann apresente desafios computacionais significativos, existem modelos matemáticos na literatura que visam simplificar o termo das colisões intermoleculares, tornando sua solução mais viável. Neste contexto, destacam-se os modelos BGK e S, propostos por Bhatnagar, Gross e Krook (BHATNAGAR; GROSS; KROOK, 1954), e Shakhov (SHAKHOV, 1968), respectivamente, que têm sido amplamente

empregados para resolver problemas de escoamento de gases rarefeitos.

O coeficiente de arrasto para o regime de moléculas livres é calculado analiticamente em ângulo de ataque arbitrário e os resultados são utilizados para validação do código numérico elaborado. Os cálculos numéricos foram feitos com base no modelo BGK para a equação de Boltzmann. A condição de contorno de espalhamento difuso é utilizada para a interação gás-superfície. Os resultados obtidos fornecem uma maior compreensão do comportamento do coeficiente de arrasto em condições de rarefação, contribuindo assim para o avanço do conhecimento e o desenvolvimento de novas tecnologias.

## 2. Formulação do problema

Considera-se uma placa plana de comprimento  $L$  e temperatura  $T_w$  em um gás rarefeito. Conforme ilustrado na Figura 1, o ângulo de ataque é denotado por  $\alpha$ , e  $\alpha + \beta = 90$  graus. O gás escoa para a direita e, longe da placa, o gás está em equilíbrio termodinâmico com temperatura  $T_\infty$ , pressão  $p_\infty$  e velocidade de escoamento constante e igual a  $U_\infty$ .



**Figura 1.** Esquema para o regime de moléculas livres.  
Fonte: elaboração própria.

A temperatura da placa é um parâmetro para o problema, mas foi assumido que  $T_w = T_\infty = 300$  K. O número de Mach, parâmetro utilizado nos cálculos, é mostrado na equação (1).

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{c_s}, \quad c_s = \sqrt{\gamma \frac{kT_\infty}{m}} \quad (1)$$

Onde  $c_s$  denota a velocidade do som no gás,  $\gamma$  é a razão entre os calores específicos no gás,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $m$  a massa atômica ou molecular. Em nosso problema, o gás é monoatômico, portanto,  $\gamma = \frac{5}{3}$ . O parâmetro de rarefação do gás é proporcional ao inverso do número de Knudsen (Kn), e pode ser escrito na equação (2).

$$\delta = \frac{Lp}{\mu v_\infty} \quad (2)$$

Onde  $L$  é o comprimento da placa,  $p$  é a pressão,  $\mu$  é a viscosidade do gás e  $v_\infty$  é dado na equação (3).

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2kT_\infty}{m}} \quad (3)$$

O objetivo é calcular o coeficiente de arrasto na placa em função do parâmetro de rarefação e do número de Mach, considerando o espalhamento difuso na condição de contorno.

Os vetores de velocidade molecular  $\xi$  e a velocidade macroscópica do gás  $U$  são escritos em termos de vetores unitários normais e tangenciais à placa, mostrados nas equações (4) e (5).

$$\xi = \xi_1 \hat{n} + \xi_2 \hat{t} + \xi_3 (\hat{n} \times \hat{t}) \quad (4)$$

$$U = U \cos \alpha \hat{n} + U \sin \alpha \hat{t} \quad (5)$$

$\hat{n}$  é o vetor unitário normal e  $\hat{t}$  é o vetor unitário tangencial.

Longe da placa, é assumido equilíbrio termodinâmico, onde a função de distribuição de velocidade molecular é dada pela função de Maxwell, mostrada na equação (6).

$$f_\infty(X, \xi) = \frac{\rho_\infty}{(2\pi RT_\infty)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2 - U_\infty}{2RT_\infty}\right) \exp\left[\frac{2U_\infty}{2RT_\infty} (\xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \sin \alpha)\right] \quad (6)$$

Onde  $\rho_\infty$  é a densidade distante da placa,  $R$  é  $\frac{k}{m}$  e  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  é o vetor velocidade molecular do gás. As grandezas adimensionais são introduzidas para a elaboração do código nas equações (7) a (15).

$$x = \frac{x}{L} \quad (7)$$

$$\zeta = \frac{\xi}{(2RT_\infty)^{1/2}} \quad (8)$$

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad (9)$$

$$\hat{v} = \frac{v}{(2RT_\infty)^{1/2}} \quad (10)$$

$$\hat{T} = \frac{T}{T_\infty} \quad (11)$$

$$\hat{f} = \frac{f v_\infty^3}{\rho_\infty} \quad (12)$$

$$\hat{p} = \frac{p}{p_\infty} \quad (13)$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_\infty} \quad (14)$$

$$\hat{q}_i = \frac{q_i}{p_\infty (2RT_\infty)^{1/2}} \quad (15)$$

Onde  $\mathbf{x}$  é o vetor posição das moléculas,  $\hat{p}_{ij}$  são as componentes do tensor de tensão,  $\hat{q}_i$  são as componentes do fluxo de calor e  $\hat{\mathbf{v}}$  é a velocidade macroscópica do gás, todos adimensionais.

Com essas considerações, a equação (6) pode ser reescrita, mostrada na equação (16).

$$\hat{f}_\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp[-(\zeta_1 - S)^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2] \exp[2S(\zeta_1 \cos \alpha + \zeta_2 \sin \alpha)] \quad (16)$$

Sendo que  $S$  é mostrado na equação (17).

$$S = \frac{U_\infty}{v_\infty} = \sqrt{\frac{y}{2}} M_\infty = \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \quad (17)$$

## 2.1. Metodologia

O trabalho foi feito inicialmente utilizando o regime de moléculas livres, que tem solução analítica, para validação do código para o regime de transição.

### 2.1.1. Equação cinética

A equação cinética atribuída para o problema vem do modelo de BGK e é escrita na equação (18).

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = A_c \rho (f_e - f) \quad (18)$$

$A_c \rho = \frac{p}{\mu}$  é a constante de frequência de colisão das moléculas do gás,  $f(X_1, X_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  é função de distribuição de velocidade molecular e  $f_e$  é escrito na equação (19).

$$f_e = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\xi - U)^2}{2RT}\right] \quad (19)$$

Adimensionalizando as equações (18) e (19), e considerando a equação (2), obtemos as equações (20) e (21).

$$\zeta_1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} = \frac{A_c \rho L}{(2RT_\infty)^{1/2}} (\hat{f}_e - \hat{f}) = \delta \hat{p} (\hat{f}_e - \hat{f}) \quad (20)$$

$$\hat{f}_e = \frac{\hat{\rho}}{\pi^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\zeta - \mathbf{v})^2}{\hat{T}}\right] \quad (21)$$

As grandezas macroscópicas: densidade ( $\rho$ ), temperatura ( $T$ ), velocidade macroscópica ( $\mathbf{U}$ ), pressão ( $p$ ), tensor de tensão ( $p_{ij}$ ) e fluxo de calor ( $q_i$ ), são calculadas em termos da função de distribuição  $f$  escritas nas equações (22) a (27).

$$\rho(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (22)$$

$$\mathbf{U}(X_1, X_2) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (23)$$

$$T(X_1, X_2) = \frac{1}{3R\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mathbf{U})^2 f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (24)$$

$$p = R\rho T \quad (25)$$

$$p_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_i - v_i)(\xi_j - v_j) f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (26)$$

$$q_i = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_i - v_i)(\xi - \mathbf{v})^2 f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (27)$$

As componentes do tensor de tensão  $p_{13} = p_{23} = 0$  e a componente  $q_3$  do fluxo de calor também é nula. Adimensionalizando, as grandezas macroscópicas são escritas nas equações (28) a (33)

$$\hat{p}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\hat{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta \hat{f} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (29)$$

$$\hat{T}(x_1, x_2) = \frac{2}{3\hat{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta - \mathbf{v})^2 \hat{f} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (30)$$

$$\hat{p} = \hat{\rho} \hat{T} \quad (31)$$

$$\hat{p}_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_i - \hat{v}_i)(\zeta_j - \hat{v}_j) \hat{f} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (32)$$

$$\hat{q}_i = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_i - \hat{v}_i)(\zeta - \hat{\mathbf{v}})^2 \hat{f} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (33)$$

### 2.1.2. Condição de contorno

De forma geral, pode-se estabelecer uma relação entre as funções de distribuição de velocidade das moléculas incidentes e refletidas utilizando a lei de conservação de massa.

Para isso, assume-se que a parede é impermeável, ou seja, ela não retém massa durante a colisão. Essa relação é descrita por (SHARIPOV, 2016), mostrada na equação (34).

$$\xi_1 f^+ = \int_{\xi'_1 > 0} \xi'_1 \mathcal{R}(\xi, \xi') f^- d\xi', \quad \xi_1 < 0 \quad (34)$$

$\xi_1$  é a componente de velocidade molecular normal à placa, os termos com apóstrofo determinam a incidência, e os sem apóstrofo, a reflexão. O termo  $\mathcal{R}$  é o núcleo de espalhamento utilizado na análise, que, nesse caso, é o núcleo difuso, escrito na equação (35).

$$\mathcal{R}(\xi, \xi') = \frac{2\xi_1}{\pi v_\infty^4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{v_\infty^2}\right) \quad (35)$$

## 2.2. Regime de moléculas livres

No regime de moléculas livres, por se tratar de um espaço em que não ocorrem interações intermoleculares, já que  $Kn \gg 1$ , podemos considerar que a função de distribuição de velocidade molecular incidente ( $f^-$ ) é a própria função de Maxwell, mostrada na equação (16). Pelo mesmo motivo, o termo à direita na equação (20) é nulo, já que o termo da constante de frequência de colisão é 0. Com essas duas considerações, é possível encontrar a função de distribuição de velocidade molecular refletida ( $f^+$ ) diretamente pela condição de contorno proposta na equação (34), de forma analítica.

Desta forma, substituindo o núcleo de espalhamento difuso,  $f^-$  e adimensionalizando, obtemos  $f^+$  na equação (36).

$$f^+ = \frac{1}{\pi^2} \exp(-\zeta^2) [\sqrt{\pi} S \cos \alpha (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) + \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2)] \quad (36)$$

Conforme as Refs. (GOMBOSI, 1994; STORCH, 2002), o cálculo das forças que agem na placa pode ser feito utilizando o fluxo de momentum. Desta forma, a força total pode ser expressa por:  $\mathbf{F} = F_D \hat{i} + F_L \hat{j} = QA$ , sendo  $F_D$  a força de arrasto e  $F_L$  a força de sustentação, ambas dadas para a face frontal da placa (*frontface*). O termo  $Q$  é o fluxo de momentum, dado por:  $Q = mv_\infty^5 (B_1 + B_2)$ , e  $A$  é a área de contato da placa com o gás.

Os termos  $B_1$  e  $B_2$  são escritos nas equações (37) e (38).

$$B_1 = \int_{\xi_1 < 0} [\xi_1^2 \hat{n}_{in} + \xi_1 \xi_2 \hat{t} + \xi_1 \xi_3 (\hat{n}_{in} \times \hat{t})] f^+ d\xi \quad (37)$$

$$B_2 = \int_{\xi_1 > 0} [\xi_1^2 \hat{n}_{in} + \xi_1 \xi_2 \hat{t} + \xi_1 \xi_3 (\hat{n}_{in} \times \hat{t})] f^- d\xi. \quad (38)$$

É assumido as considerações das equações (39) e (40).

$$\hat{i} = \cos \alpha \hat{n} + \sin \alpha \hat{t} \quad (39)$$

$$\hat{n} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} \quad (40)$$

Substituindo as funções de distribuição de velocidades moleculares ( $f^+$  e  $f^-$ ) e resolvendo as integrais, obtemos as expressões para  $B_1$  e  $B_2$  nas equações (41) e (42).

$$B_1 = \frac{\rho_\infty}{4v_\infty^3} [\sqrt{\pi} S \cos \alpha (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) + \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2)] (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) \quad (41)$$

$$B_2 = \frac{\rho_\infty}{2v_\infty^3 \sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 2S^2) (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) \cos \alpha + S \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2) \hat{i} + \frac{\rho_\infty}{2v_\infty^3 \sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) \sin \alpha \right] \hat{j} \right] \quad (42)$$

Desta forma, se considerarmos ainda que  $m\rho_\infty v_\infty^2 = \frac{w_\infty U_\infty^2}{S^2}$ , sendo  $w_\infty$  a densidade de massa por volume,  $QA$  é escrito na equação (43).

$$QA = \frac{w_\infty U_\infty^2}{S^2} A \left\{ \frac{1}{4} [\sqrt{\pi} S \cos \alpha (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) + \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2)] (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) + \frac{1}{4} (1 + 2S^2) (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) \cos \alpha \hat{i} + \frac{S}{2\sqrt{\pi}} \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2) \hat{i} + \frac{1}{4} (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) \sin \alpha \hat{j} \right\} \quad (43)$$

Separando a equação (43) em  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  temos as forças de arrasto ( $F_D \hat{i}$ ) e de sustentação ( $F_L \hat{j}$ ), para *frontface*.

No presente trabalho, apenas a força de arrasto é calculada, mostrada na equação (44).

$$F_{D, frontface} = \frac{w_\infty U_\infty^2}{4S^2} A \left\{ [\sqrt{\pi} S \cos \alpha (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) + \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2)] (\cos \alpha) + (1 + 2S^2) (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) \cos \alpha + \frac{2S}{\sqrt{\pi}} \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2) \right\} \quad (44)$$

Com a força, é possível encontrar o coeficiente através da equação (45).

$$C_{D, frontface} = \frac{F_D}{\frac{1}{2} w_\infty U_\infty^2 A} \quad (45)$$

Portanto, o coeficiente de arrasto para uma face (*frontface*) é mostrado na equação (46).

$$C_{D, frontface} = \frac{1}{2S^2} \left\{ [\sqrt{\pi} S \cos \alpha (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) + \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2)] (\cos \alpha) + (1 + 2S^2) (1 + \operatorname{erf}(S \cos \alpha)) \cos \alpha + \frac{2S}{\sqrt{\pi}} \exp(-S^2 (\cos \alpha)^2) \right\} \quad (46)$$

Na *backface* a angulação é dada por  $\hat{n} = -\cos(\alpha) \hat{i} - \sin(\alpha) \hat{j}$  e o cálculo para o coeficiente aerodinâmico nas duas faces é a soma dos coeficientes para *frontface* e *backface*, da forma mostrada na equação (47).

$$C_D = C_{D, frontface} + C_{D, backface} \quad (47)$$

Assim, o coeficiente de arrasto é escrito, para as duas faces, na equação (48)

$$C_D = \frac{1}{S^2} \left\{ [\sqrt{\pi} S \cos \alpha + (1 + 2S^2) \operatorname{erf}(S \cos \alpha)] \cos \alpha + \frac{2S}{\sqrt{\pi}} \exp(S^2 \cos^2 \alpha) \right\} \quad (48)$$

### 2.3. Regime de transição

No regime de transição não é possível considerar que não há interações moleculares, como no regime de moléculas livres, por esse fato, é necessário resolver a

equação de Boltzmann dada pela equação (20) considerando o termo de frequência de colisão, sem poder admitir que  $f^-$  é a equação de Maxwell. Pela dificuldade na resolução, é considerado ângulo de ataque igual a zero nesse caso ( $\alpha = 0$ ).

Por conveniência, é necessário introduzir uma nova função  $\phi$  para o problema, escrita na equação (49).

$$\phi = \frac{(2RT_\infty)^{3/2}(f - f_\infty)}{\rho_\infty} \quad (49)$$

Desta forma, a equação (20) é escrita, adimensionalmente, em termos de  $\phi$ , na equação (50).

$$\begin{aligned} \zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 2RT_\infty A_c \hat{\rho} L & \left\{ \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left( -\frac{(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 - (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2 - \zeta_3^2}{\hat{T}} \right) \left[ \frac{\rho_\infty}{(2RT_\infty)^{3/2}} \phi + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\rho_\infty}{(2\pi RT_\infty)^{3/2}} \exp \left( -\left( \zeta_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

Adimensionalizando, as grandezas macroscópicas que aparecem do lado direito são escritas em função de  $\phi$  como mostrado nas equações (51) a (54).

$$\hat{\rho} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 + 1 \quad (51)$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\rho} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_1 \phi d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 + \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right) \quad (52)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_2 \phi d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{T} = \frac{2}{3\hat{\rho}} \{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 + (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2] \phi + \\ \zeta_3^2 \phi] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 + \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 + \hat{v}_2^2 + \frac{3}{2} \} \end{aligned} \quad (54)$$

Assumimos espalhamento difuso das moléculas gasosas na superfície. Isso significa que a função de distribuição das moléculas refletidas é dada pela função de Maxwell com as características da superfície (temperatura e velocidade), escrita na equação (55).

$$f_w^M(X_1, X_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\rho_w}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp \left( -\frac{\xi^2}{2RT_w} \right) \quad (55)$$

Onde  $\rho_w$  é escrito na equação (56).

$$\rho_w = \mp \left( \frac{2\pi}{RT_w} \right)^{1/2} \int_{\pm \xi_2 < 0} \xi_2 f(X_1, 0 \pm 0, \xi) d\xi \quad (56)$$

Sendo que o índice  $w$  representa as propriedades da parede. O termo  $0 + 0$  significa o lado de cima e o termo  $0 - 0$  significa o lado de baixo da placa.

A condição de contorno em  $X_2 = 0$ , considerando ambos os lados da placa, é escrita como na equação (57).

$$f(X_1, 0 \pm 0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_w^M \quad \xi_2 \geq 0 \quad (57)$$

Para introduzir a condição de contorno no código numérico, é necessário escrever as equações (55) e (56) também em função de  $\phi$ , mostrado nas equações (58) e (59).

$$f_w^M = \frac{\phi \rho_\infty}{(2RT_\infty)^{3/2}} + f_\infty = \frac{\rho_w}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp \left( \frac{-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}{2RT_w} \right) \quad (58)$$

$$\rho_w = \mp \left( \frac{2\pi}{RT_w} \right)^{1/2} \int_{\pm \xi_2 < 0} \xi_2 \left( \frac{\phi \rho_\infty}{(2RT_\infty)^{3/2}} + f_\infty \right) d\xi \quad (59)$$

Assim, a equação (58) pode ser escrita, isolando  $\phi$  e adimensionalizando, na equação (60).

$$\begin{aligned} \phi(x_1, 0 \pm 0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\hat{\rho}_w T_\infty^{3/2}}{\pi^{3/2} T_w^{3/2}} \exp \left( \frac{-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2}{T_w/T_\infty} \right) - \\ \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp \left[ -\left( \zeta_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 \right] \end{aligned} \quad (60)$$

Onde  $\hat{\rho}_w$  é escrito na equação (61).

$$\hat{\rho}_w = -2\sqrt{\pi} \left( \frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2 \phi d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right) \quad (61)$$

### 2.3.1. Método numérico

A solução do problema no regime de transição não é analítica, sendo necessário a criação de um código numérico para resolvê-lo numericamente. No problema proposto temos 5 variáveis  $(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ , o que acaba dificultando o cálculo numérico. Por esse motivo, duas novas funções são introduzidas para que a variável  $\zeta_3$  seja eliminada. As funções estão presentes nas equações (62) e (63).

$$\chi(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi d\zeta_3 \quad (62)$$

$$\psi(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_3^2 \phi d\zeta_3 \quad (63)$$

Desta forma, podemos escrever a equação (50) para cada função nova, dadas pelas equações (64) e (65).

$$\begin{aligned} \zeta_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} = \delta \left\{ \frac{\hat{\rho}}{\pi \hat{T}} \exp \left[ -\frac{(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 - (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2}{\hat{T}} \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\left( \zeta_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 \right] - \chi \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\zeta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \delta \left\{ \frac{\hat{p}}{2\pi} \exp \left[ -\frac{(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 - (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2}{\hat{T}} \right] - \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\left( \zeta_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 \right] - \psi \right\} \quad (65)$$

As grandezas macroscópicas também são reescritas em função das novas funções nas equações (66) a (69).

$$\hat{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi d\zeta_1 d\zeta_2 + 1 \quad (66)$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\rho} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_1 \chi d\zeta_1 d\zeta_2 + \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right) \quad (67)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_2 \chi d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (68)$$

$$\hat{T} = \frac{2}{3\hat{p}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 + (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2] \chi + \psi \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 + \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 + \hat{v}_2^2 + \frac{3}{2} \quad (69)$$

Podemos escrever a pressão, os tensores de tensão e o fluxo de calor também em função de  $\chi$  e  $\psi$ , conforme mostrado nas equações (70) a (76).

$$\hat{p} = \hat{p}\hat{T} \quad (70)$$

$$\hat{p}_{11} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 \chi d\zeta_1 d\zeta_2 + 2 \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right)^2 + 1 \quad (71)$$

$$\hat{p}_{12} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_1 - \hat{v}_1)(\zeta_2 - \hat{v}_2) \chi d\zeta_1 d\zeta_2 + 2 \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \hat{v}_2 \quad (72)$$

$$\hat{p}_{22} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2 \chi d\zeta_1 d\zeta_2 + 2\hat{v}_2^2 + 1 \quad (73)$$

$$\hat{p}_{33} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi d\zeta_1 d\zeta_2 + 1 \quad (74)$$

$$\hat{q}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_1 - \hat{v}_1) \{ [(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 + (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2] \chi + \psi \} d\zeta_1 d\zeta_2 - \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right) \left[ \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 + \hat{v}_2 + \frac{5}{2} \right] \quad (75)$$

$$\hat{q}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta_2 - \hat{v}_2) \{ [(\zeta_1 - \hat{v}_1)^2 + (\zeta_2 - \hat{v}_2)^2] \chi + \psi \} d\zeta_1 d\zeta_2 - \hat{v}_2 \left[ \left( \hat{v}_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 + \hat{v}_2 + \frac{5}{2} \right] \quad (76)$$

Desta forma, é possível encontrar as condições de contorno para  $\chi$  e  $\psi$  introduzindo as equações (62 e 63) na equação (60). Assim, são obtidas as equações (77) e (78).

$$\chi(x_1, 0 \pm 0, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{\hat{p}_w T_\infty}{\pi T_w} \exp \left( \frac{-\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{T_w/T_\infty} \right) - \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\left( \zeta_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 - \zeta_2^2 \right] \quad \zeta_2 \geq 0 \quad (77)$$

$$\psi(x_1, 0 \pm 0, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{\hat{p}_w}{2\pi} \exp \left( \frac{-\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{T_w/T_\infty} \right) - \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\left( \zeta_1 - \sqrt{\frac{5}{6}} M_\infty \right)^2 - \zeta_2^2 \right], \quad \zeta_2 \geq 0 \quad (78)$$

Onde  $\hat{p}_w$  é escrito na equação (79) em termos de  $\chi$ .

$$\hat{p}_w = -2\sqrt{\pi} \left( \frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2 \chi d\zeta_1 d\zeta_2 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right) \quad (79)$$

Longe da placa as funções  $\chi$  e  $\psi$  são nulas.

### 2.3.2. Cálculo da força e do coeficiente de arrasto

A força de arrasto, por unidade de largura ( $X_3$ ), é calculada através da componente de tensor de tensão  $p_{12}$ , obtida pela equação (72), mostrada na equação (80).

$$F_D = -2 \int_{-L/2}^{+L/2} p_{12} dX_1 \quad (80)$$

O coeficiente de arrasto é definido em termos da força conforme mostrada na equação (81)

$$C_D = \frac{6}{5M_\infty^2} \frac{F_D}{w_\infty U_\infty^2 L} \quad (81)$$

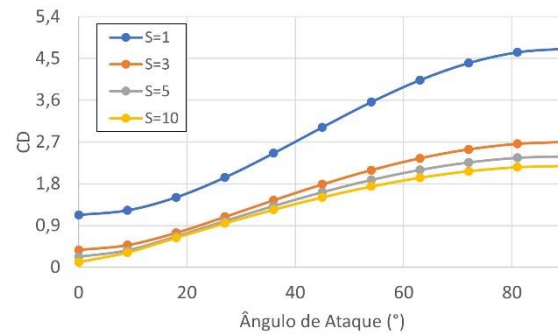
As equações (64) e (65), sujeitas às condições dadas pelas equações (77) e (78), foram resolvidas numericamente usando o método de velocidades discretas, aproximando as derivadas por diferença finita e as integrais pela quadratura gaussiana.

### 3. Resultados e discussões

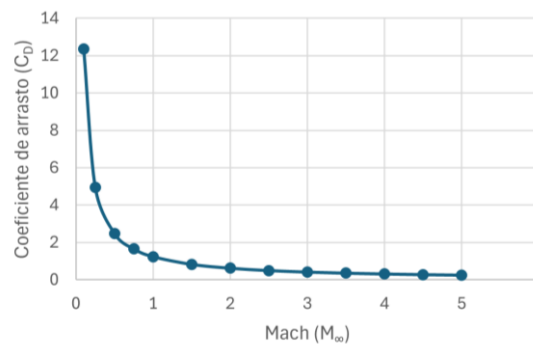
A Figura 2 mostra o comportamento do coeficiente de arrasto em função de ângulo de ataque para o regime de moléculas livres, sendo possível observar a contribuição do parâmetro S, que é diretamente proporcional ao número de Mach.

A análise do gráfico revela um desvio considerável no coeficiente de arrasto à medida que S varia. O desvio máximo em relação a S=1 é observado quando S=10, atingindo cerca de 90% em ângulo de ataque nulo.

Com a equação (48) é possível obter o perfil do coeficiente de arrasto com a variação do número de Mach para ângulo de ataque nulo. Na Figura 3 esse perfil é mostrado.



**Figura 2.** Coeficiente de arrasto em função do ângulo de ataque para vários valores de  $S$ . Fonte: elaboração própria.



**Figura 3.** Coeficiente de arrasto em função do número de Mach. Fonte: elaboração própria.

É possível observar que, conforme o número de Mach aumenta, o coeficiente de arrasto diminui. Esse é um perfil observado exclusivamente para o regime de moléculas livres.

Os resultados obtidos na Figura 3 foram comparados aos dados para moléculas livres disponíveis na literatura (AOKI; KANBA; TAKATA, 1997), apresentando boa concordância, o que valida a precisão do método numérico utilizado.

No regime de transição a função de distribuição de velocidades moleculares apresenta descontinuidade nas bordas (*leading e trailing edges*). Esse problema numérico é resolvido utilizando um método apropriado para lidar com essa descontinuidade. Essa otimização do esquema numérico está sendo feita no momento e, em breve, teremos uma ampla tabela para o coeficiente de arrasto em função do número de Mach e do número de Knudsen.

#### 4. Conclusão

Os resultados obtidos no presente trabalho mostram a dependência do coeficiente de arrasto no número de Mach e no grau de rarefação do gás. Conforme mostrado, quanto mais rarefeito é o gás, maior é a dependência do coeficiente de arrasto no número de Mach.

#### 5. Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos à minha família e orientadora pelo incentivo e à FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processos nº 2022/10551-3 e nº 2024/00022-9) pelo apoio financeiro essencial para realização desse trabalho.

#### Referências Bibliográficas

- [1] C Cercignani. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1975.
- [2] P L Bhatnagar, E P Gross, and M A Krook. A model for collision processes in gases. Phys. Rev., 94:511–525, 1954.
- [3] E M Shakhov. Generalization of the Krook kinetic relaxation equation. Fluid Dynamics, 3(5):95–96, 1968.
- [4] F Sharipov. Rarefied Gas Dynamics. Fundamentals for Research and Practice. Wiley-VCH, Berlin, 2016. 46
- [5] T I Gombosi. Gaskinetic theory. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] J A Storch. Aerodynamic Disturbances on Spacecraft in Free-Molecular Flow, AEROSPACE REPORT NO. TR-2003(3397)-1. Technical report, 2002.  
35

[7] Aoki, K Kanba, and S Takata. Numerical analysis of a supersonic rarefied gas flow past a flat plate. Phys. Fluids, 9:1144, 1997.